Über Beziehungen zwischen Umgebungsräumen und Häufungsräumen

Von Karl Apfelbacher in München

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde der naturwissenschaftlichen Fakultät der Ludwig-Maximilians-Universität München

Eingereicht am 29. November 1938 von Karl Apfelbacher aus München

Berichterstatter: Geheimrat Professor Dr. H. Tietze

Tag der mündlichen Prüfung: 23. II. 1939

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Über Beziehungen zwischen Umgebungsräumen und Häufungsräumen.

Von **Karl Apfelbacher** in München.

Inhaltsübersicht:

§ 1. Einleitung . . . . . Nr. 1— 2
Seite 153—158

§ 2. Grundbegriffe. Umgebungsraum und zugeordneter Häufungsraum, Umgebungsraum und zugeordneter Umgebungsraum; Häufungsraum und zugeordneter Umgebungsraum, Häufungsraum und zugeordneter Häufungsraum . . . . . Nr. 3— 10
Seite 158—166

§ 3. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Identität zwischen Umgebungsraum und zugeordnetem Umgebungsraum . Nr. 11— 17
Seite 166—171

§ 4. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Identität zwischen Häufungsraum und zugeordnetem Häufungsraum . . Nr. 18— 22
Seite 171—176

§ 5. Kennzeichnende Eigenschaften des Häufungsraumes, der einem Umgebungsraum und des Umgebungsraumes, der einem Häufungsraum zugeordnet ist . . . . . Nr. 23— 27
Seite 176—180

§ 6. Folgen von zugeordneten Umgebungs- und Häufungsräumen . . Nr. 28— 29
Seite 180—182

§ 7. Umgebungsraum und äquivalenter Häufungsraum, Häufungsraum und äquivalenter Umgebungsraum. Äquivalente Systeme von Umgebungs- und Häufungsaxiomen . . . . . Nr. 30— 34
Seite 183—193

§ 1. Einleitung.

1. Unter einem *„Raum“* wird in der Topologie eine Menge von irgendwelchen Elementen verstanden, für die Festsetzungen über Limiten oder Häufungselemente oder Umgebungen oder offene Mengen oder abgeschlossene Hüllen oder dergleichen getroffen sind; die Festsetzungen sind meist derart gewählt, daß gewisse für den Begriff des Limes, des

Häufungselementes usw. charakteristische Eigenschaften („*Axiome*“) gelten [1]).

Zwischen den einzelnen Gattungen solcher Räume bestehen zum Teil enge Zusammenhänge insofern, als unter Zugrundelegung geeigneter Übergangsbeziehungen viele Räume der einen Art auch als Räume einer anderen Art angesehen werden können [2]). So lassen sich z. B. Räume mit Festsetzungen über Umgebungen auch als Räume mit Festsetzungen über Limiten ansprechen, wenn in den ersteren Räumen auf passende Weise Limesbeziehungen erklärt werden.

Zur Kenntnis derartiger Zusammenhänge will auch die vorliegende Arbeit einen Beitrag liefern. Sie beschränkt sich dabei ausschließlich auf Räume mit Festsetzungen über Umgebungen bzw. Häufungselemente. Um größtmögliche Allgemeinheit zu erzielen, werden die Umgebungs- bzw. Häufungsbeziehungen dieser Räume keinerlei einschränkenden Axiomen unterworfen [3]). Erklärt man dann auf eine ganz bestimmte Weise, die im Folgenden (vgl. § 2, Nr. 8) näher dargelegt werden wird und für die Ergebnisse der Arbeit von wesentlicher Bedeutung ist, in einem Raum mit Umgebungsfestsetzungen („*Umgebungsraum*“) Häufungselemente, so entspringt dadurch aus dem Umgebungsraum eindeutig ein Raum mit Häufungsbeziehungen („*Häufungsraum*“), der als der dem Umgebungsraum „*zugeordnete*“ Häufungsraum bezeichnet sein möge. Legt man andererseits auf eine geeignete Art, die im Folgenden ebenfalls genau dargelegt wird (vgl. § 2, Nr. 8), in einem Häufungsraum Umgebungen fest, so wird damit dem Häufungsraum eindeutig ein Umgebungsraum „*zugeordnet*“.

---

[1]) Zur Terminologie vgl. H. Tietze—L. Vietoris, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III AB 13, Nr. 5, 6, 7, 8, 10 sowie die dort angegebene Literatur. An neueren Arbeiten, bei denen derartige Räume eine wesentliche Rolle spielen, vgl. insbesondere W. Sierpiński, Math. Ann. 97 (1927) S. 321; E. W. Chittenden, Trans. Am. Math. Soc. 31 (1929) S. 290; R. Stephens, Trans. Am. Math. Soc. 34 (1932) S. 394; W. O. Gordon, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (1933) S. 401. Vgl. ferner die Lehrbücher: F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 213; Seifert—Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Leipzig 1934, S. 21; P. Alexandroff—H. Hopf, Topologie, 1. Band, Berlin 1935, S. 24.

[2]) Vgl. H. Tietze—L. Vietoris, l. c. [1]), Nr. 15.

[3]) Räume mit *Umgebungs*beziehungen von derartig allgemeiner Art werden auch bei W. O. Gordon, l. c. [1]) zugrundegelegt; auch in dem Lehrbuch P. Alexandroff—H. Hopf, l. c. [1]) S. 30 finden solche Räume Erwähnung. Räume mit *Häufungs*beziehungen derartig allgemeiner Art werden auch verwendet bei W. Sierpiński, l. c. [1]), E. W. Chittenden, l. c. [1]), R. Stephens, l. c. [1]). Näheres in Nr. 7 der vorliegenden Arbeit.

Ist nun $\mathfrak{T}_0$ irgendein Umgebungsraum, $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ der zugeordnete Häufungsraum [4]) und wird der diesem Häufungsraum zugeordnete Umgebungsraum mit $\mathfrak{T}[\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)] = \mathfrak{T}_1$ bezeichnet, so ist $\mathfrak{T}_1$ nicht notwendig gleich $\mathfrak{T}_0$. Ebenso sind, wenn $\mathfrak{H}_0$ irgendeinen Häufungsraum, $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ den zugeordneten Umgebungsraum und $\mathfrak{H}[\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)] = \mathfrak{H}_1$ den dem Raum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ zugeordneten Häufungsraum bezeichnet, $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_0$ nicht notwendig einander gleich. Es erwächst die Aufgabe, Bedingungen aufzufinden, so daß $\mathfrak{T}_1$ identisch $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{H}_1$ identisch $\mathfrak{H}_0$ wird.

2. In den §§ 3 und 4 der Arbeit wird gezeigt werden, daß sich für die Identität von $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{T}_1$ zwei Bedingungen (t_1), (t_2) (vgl. Nr. **12**), für die Identität von $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_1$ eine Bedingung (h_1) (vgl. Nr. **18**) als notwendig und hinreichend erweisen. Die Bedingungen schließen sich nach Form und Inhalt eng an die üblichen Axiome an.

In § 5 werden Betrachtungen über die Eigenschaften zugeordneter Räume angestellt. Es wird gezeigt werden, daß der einem Umgebungsraum zugeordnete Häufungsraum ebenso wie der einem Häufungsraum zugeordnete Umgebungsraum stets von spezieller Art ist, wie allgemein auch immer der Ausgangsraum sein möge, und zwar hat der einem Umgebungsraum zugeordnete Häufungsraum stets die Eigenschaft (h_1), der einem Häufungsraum zugeordnete Umgebungsraum stets die Eigenschaft (t_1), nicht allemal auch die Eigenschaft (t_2) [5]). Umgekehrt läßt sich zu jedem Häufungsraum mit der Eigenschaft (h_1) ein Umgebungsraum angeben, derart, daß der Häufungsraum den diesem Umgebungsraum zugeordneten Raum darstellt; desgleichen kann man zu jedem Umgebungsraum mit der Eigenschaft (t_1) einen Häufungsraum finden, derart, daß der Umgebungsraum gleich ist dem diesem Häufungsraum zugeordneten Raum.

In § 6 werden *„Folgen“* von zugeordneten Räumen betrachtet, die aus einem Umgebungsraum oder Häufungsraum als Ausgangsraum erwachsen in der Weise, daß jeder Raum der Folge dem in der Folge vorhergehenden Raum zugeordnet ist. Dabei ergibt sich, daß solche Folgen nicht aus unendlich vielen *verschiedenen* Gliedern bestehen, sondern daß vielmehr, wie allgemein der Ausgangsraum auch immer

---

[4]) Die Bezeichnung des Umgebungsraumes mit dem Buchstaben $\mathfrak{T}$ und des Häufungsraumes mit dem Buchstaben $\mathfrak{H}$ erfolgt in Anlehnung an die Bezeichnungsweise bei H. Tietze — L. Vietoris, l. c.[1]), Nr. 8 und Nr. 7; jedoch werden in der vorliegenden Arbeit unter $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{H}$ wesentlich allgemeinere Räume verstanden als bei H. Tietze — L. Vietoris; vgl. diesbezüglich Nr. **7** der vorliegenden Arbeit.

[5]) Die Eigenschaft (t_2) besitzt er vielmehr dann und nur dann, wenn der Ausgangsraum eine gewisse Eigenschaft (h''_1) hat. Vgl. Nr. **27**.

sein möge, von einem gewissen Glied an immer wieder derselbe Umgebungsraum und Häufungsraum im Wechsel auftreten.

In § 7 schließlich wird die Frage der *„Äquivalenz"* zwischen Umgebungs- und Häufungsräumen untersucht. Die Problemstellung ist dabei die folgende:

Gegeben seien ein Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ und ein Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$. $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{H}_0$ seien als *„äquivalent"* bezeichnet, wenn $\mathfrak{T}_0$ gleich ist dem dem Raum $\mathfrak{H}_0$ zugeordneten Umgebungsraum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ und $\mathfrak{H}_0$ gleich ist dem dem Raum $\mathfrak{T}_0$ zugeordneten Häufungsraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$.

Wir fragen einerseits, ob es zu einem gegebenen Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ allemal einen zu $\mathfrak{T}_0$ äquivalenten Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ gibt bzw. unter welchen Voraussetzungen zu einem gegebenen Umgebungsraum ein äquivalenter Häufungsraum gefunden werden kann; wir fragen andererseits, ob zu einem vorgelegten Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ allemal ein zu $\mathfrak{H}_0$ äquivalenter Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ vorhanden ist bzw. unter welchen Bedingungen zu einem gegebenen Häufungsraum ein äquivalenter Umgebungsraum existiert.

Als einfache Folgerung aus den Überlegungen der §§ 3 und 4 läßt sich zeigen, daß zu einem vorgelegten Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ dann und nur dann ein äquivalenter Häufungsraum und zu einem vorgelegten Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ dann und nur dann ein äquivalenter Umgebungsraum — und zwar jeweils auch nur ein einziger äquivalenter Raum — angebbar ist, wenn $\mathfrak{T}_0$ die Eigenschaften $(t_1), (t_2)$ bzw. wenn $\mathfrak{H}_0$ die Eigenschaft (h_1) besitzt. Dabei ist der zum Ausgangsraum *äquivalente* Raum nichts anderes als der dem Ausgangsraum *zugeordnete* Raum[6]).

Aus diesem Ergebnis folgt weiter: Faßt man den Begriff des Umgebungsraumes und den Begriff des Häufungsraumes enger als es in dieser Arbeit geschieht, und zwar dadurch, daß man zum Begriff Umgebungsraum die Forderungen $(t_1), (t_2)$, zum Begriff Häufungsraum die Forderung (h_1) hinzunimmt, so sind die auf diese Art definierten Begriffe Umgebungsraum und Häufungsraum „äquivalent" in dem Sinne, daß zu jedem Raum der einen Gattung ein äquivalenter Raum angebbar ist, der der anderen Gattung angehört; die Begriffe Umgebungsraum und Häufungsraum der in dieser Arbeit zugrundegelegten allgemeinen Fassung aber sind im genannten Sinne *nicht* äquivalent.

---

[6]) Der Sinn dieser Äquivalenz liegt darin: Sind $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{H}_0$ äquivalente Räume, so kann man offenbar $\mathfrak{T}_0$ durch $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_0$ durch $\mathfrak{T}_0$ ersetzen und es ist völlig gleichbedeutend, ob man den Raum $\mathfrak{T}_0$ oder den Raum $\mathfrak{H}_0$ studiert; das Studium des Raumes $\mathfrak{T}_0$ liefert letzten Endes den gleichen Umfang an Erkenntnissen wie das Studium des Raumes $\mathfrak{H}_0$.

Man kann natürlich den Begriff Umgebungsraum außer durch die Forderungen $(t_1), (t_2)$ auch durch irgendwelche andere Forderungen $(t'), (t''), (t'''), \ldots, (t^{(k)})$ („*Umgebungsaxiome*“ [7]) und den Begriff des Häufungsraumes außer durch die Bedingung (h_1) auch durch irgendwelche andere Bedingungen $(h'), (h''), (h'''), \ldots, (h^{(l)})$ („*Häufungsaxiome*“ [7]) einengen und sich fragen, ob zwischen den auf diese Art gewonnenen Begriffen Umgebungsraum und Häufungsraum Äquivalenz besteht, oder mit anderen Worten, ob das System $(t'), (t''), (t'''), \ldots, (t^{(k)})$ von Umgebungsaxiomen und das System $(h'), (h''), (h'''), \ldots, (h^{(l)})$ von Häufungsaxiomen zwei äquivalente Axiomensysteme darstellen.

Man zeigt leicht: Ein System von Umgebungsaxiomen und ein System von Häufungsaxiomen können jedenfalls nur dann äquivalent sein, wenn das erstere System die Axiome $(t_1), (t_2)$, das letztere System das Axiom (h_1) explicit oder implicit enthält. Ob zwei diesen Forderungen genügende Systeme dann tatsächlich äquivalent sind, kann nur von Fall zu Fall entschieden werden. Es gibt sicher Systeme von Umgebungs- und Häufungsaxiomen, die äquivalent sind: das aus den Axiomen $(t_1), (t_2)$ bestehende System von Umgebungsaxiomen und das aus dem Axiom (h_1) bestehende System von Häufungsaxiomen sind nämlich bereits äquivalente Systeme, und zwar sind es unter den möglichen äquivalenten Systemen offenbar gerade diejenigen, die den geringstmöglichen Umfang an Forderungen aufweisen. Man findet aber auch leicht weitere äquivalente Systeme: $(\overline{A}b), (\overline{B})$ und $(h_1), (2)$; $(\overline{A}), (\overline{B}), (\overline{D}_0)$ und $(1), (2), (3)$; $(\overline{A}), (\overline{B}), (\overline{C}), (\overline{D}_0)$ und $(1), (2), (3), (4)$ sind z. B. solche äquivalente Systeme [8]), wie in Nr. **33** näher dargelegt wird. Andererseits lassen sich aber auch mühelos Systeme angeben, die die Axiome $(t_1), (t_2)$ bzw. (h_1) enthalten und *nicht* äquivalent sind: so stellen z. B. — die nähere Erörterung wird in Nr. **32** erfolgen — die Systeme $(\overline{A}), (\overline{B}a)$ und (h_1); $(\overline{A}b), (\overline{B}a)$ und $(h_1), (2)$; $(\overline{A}), (\overline{B}a)$ und $(h_1), (2)$; $(\overline{A}), (\overline{B}a), (\overline{C})$ und $(h_1), (2)$; $(\overline{A}b), (\overline{B}a), (\overline{C}), (\overline{D}_0)$ und $(h_1), (2), (4)$ sicher je zwei nicht-äquivalente Systeme dar.

Die Systeme $(\overline{A}), (\overline{B}), (\overline{C}), (\overline{D}_0)$ und $(1), (2), (3), (4)$ sind auch bei H. Tietze — L. Vietoris, l. c. [1]), Nr. 10 als äquivalent aufgeführt. Während dabei H. Tietze—L. Vietoris den Begriff der Äquivalenz — ohne ihn allerdings eigens zu definieren — letzten Endes im gleichen Sinne gebrauchen wie er in der vorliegenden Arbeit Verwendung findet,

---

[7]) Vgl. Nr. **1**, 1. Absatz.

[8]) Bezüglich des Wortlauts dieser Axiome vgl. Nr. **7**.

weichen die Definitionen, die den Übergang von der einen Raumart zur anderen herstellen, bei H. Tietze—L. Vietoris zum Teil von den hier in dieser Arbeit zugrundegelegten ab, und zwar besteht der Unterschied in der Verschiedenartigkeit der Erklärung von Häufungselementen im Umgebungsraum [9]). Daß trotzdem die Systeme $(\bar{A}), (\bar{B}), (\bar{C}), (\bar{D}_0)$ und $(1), (2), (3), (4)$ auch unter Zugrundelegung der Definition von H. Tietze—L. Vietoris äquivalent sind, erklärt sich dadurch, daß, wie in Nr. **33** gezeigt werden wird, in Umgebungsräumen, die die Eigenschaften $(\bar{B}b)$ und $(\bar{D}_0)$ besitzen, die Definition von Häufungselementen nach H. Tietze—L. Vietoris und die von uns verwendete Definition von Häufungselementen gleichwertig sind. Jedoch sind keineswegs in *jedem* Falle Systeme, die unter Zugrundelegung der von uns gebrauchten Häufungspunkterklärung äquivalent sind, auch unter Zugrundelegung der von H. Tietze—L. Vietoris gebrauchten Häufungspunkterklärung äquivalent: die Systeme $(t_1), (t_2)$ und (h_1) z. B. erweisen sich, wenn der Übergang vom Umgebungsraum zum Häufungsraum nach H. Tietze—L. Vietoris vorgenommen wird, als nicht-äquivalent (vgl. Nr. **34**), während sie unter Zugrundelegung unserer Definition von Häufungselementen äquivalent sind.

Es wird hieraus deutlich, wie wesentlich derartige Äquivalenzaussagen und überhaupt Aussagen über Zuordnung von Räumen verschiedener Art von den Festsetzungen abhängig sind, durch die die Zuordnung zwischen den Raumbegriffen vorgenommen wird; anderssgeartete Zuordnungsbeziehungen können wesentlich andere Ergebnisse zur Folge haben. Es ist daher notwendig, bei allen Fragestellungen, die den Zusammenhang zwischen zwei Raumbegriffen behandeln, als Grundlage der Erörterungen genaue Festsetzungen darüber zu treffen, wie der Übergang vom einen Raumbegriff zum anderen hergestellt werden soll.

§ 2. Grundbegriffe. Umgebungsraum und zugeordneter Häufungsraum, Umgebungsraum und zugeordneter Umgebungsraum; Häufungsraum und zugeordneter Umgebungsraum, Häufungsraum und zugeordneter Häufungsraum.

3. In der Arbeit werden ganz allgemein die folgenden Bezeichnungen verwendet: Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ irgend zwei Mengen von Elementen, so bedeutet die Schreibweise $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}$ (oder $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$), daß $\mathfrak{B}$ Teilmenge von

[9]) Die Erklärung von Umgebungsbeziehungen im Häufungsraum erfolgt bei H. Tietze—L. Vietoris in der gleichen Weise wie bei uns. Näheres in Nr. **34** der vorliegenden Arbeit.

$\mathfrak{A}$ ist, und $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ (oder $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$), daß $\mathfrak{B}$ *echte* (d. h. von $\mathfrak{A}$ verschiedene) Teilmenge von $\mathfrak{A}$ ist[10]). Es bedeutet $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$ die „*Vereinigung*", $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ den „*Durchschnitt*" von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ kein Element gemein, dann wird die Vereinigung auch in der Form: $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ geschrieben.

Eine nur aus einem Element P oder aus einzelnen Elementen $P, Q, R, \ldots$ bestehende Menge wird mit $\{P\}$ bzw. $\{P, Q, R, \ldots\}$ bezeichnet.

Ist $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}$, so wird unter $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{B}$ bezüglich $\mathfrak{A}$ verstanden. Das Symbol $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ ist also nur definiert, wenn $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}$ ist. Entsprechend ist $\mathfrak{A} - \{P\}$ zunächst nur erklärt, wenn $\mathfrak{A} \supseteq \{P\}$, wenn also P Punkt von $\mathfrak{A}$ ist. Aus Zweckmäßigkeitsgründen definieren wir hinzu: Es bedeute $\mathfrak{A} - \{P\} = \mathfrak{A}$, wenn P nicht Punkt von $\mathfrak{A}$ ist.

4. Ist n eine natürliche Zahl, $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ ein System beliebiger reeller Zahlen — die Reihenfolge ist dabei wesentlich —, dann werde die Menge aller n-tupeln $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ „*der n-dimensionale Zahlenraum* $\mathfrak{R}^n$", jedes System $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ „*Punkt*" des $\mathfrak{R}^n$ und die nichtnegative reelle Zahl $P_0P_1 = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (\xi_{1\nu} - \xi_{0\nu})^2}$ „*Abstand*" der beiden Punkte $P_0 = (\xi_{01}, \xi_{02}, \ldots, \xi_{0n})$ und $P_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots, \xi_{1n})$ des $\mathfrak{R}^n$ genannt[11]).

Bezeichnet P_0 irgendeinen Punkt einer Menge $\mathfrak{P}$ des $\mathfrak{R}^n$, dann heiße in $\mathfrak{P}$ „*Umgebung von* P_0" jede Teilmenge von $\mathfrak{P}$, für die es eine Zahl $\rho > 0$ gibt, derart, daß alle Punkte P von $\mathfrak{P}$ mit $\overline{PP_0} < \rho$ der Teilmenge angehören.

Es heiße, wenn P_0 irgendeinen Punkt von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{A}$ irgendeine Teilmenge von $\mathfrak{P}$ bedeutet, P_0 in $\mathfrak{P}$ „*Häufungspunkt von* $\mathfrak{A}$" dann und nur dann, falls es zu jedem vorgegebenen $\rho > 0$ unendlich viele Punkte P von $\mathfrak{A}$ mit $\overline{PP_0} < \rho$ gibt.

5. Sind in dieser Weise in einer Menge $\mathfrak{P}$ des $\mathfrak{R}^n$ Häufungspunkte festgelegt, so kann man in $\mathfrak{P}$ die nämlichen Umgebungsbeziehungen wie vorhin auch durch folgende Definition erhalten: Ist P_0 irgendein Punkt von $\mathfrak{P}$, dann heiße in $\mathfrak{P}$ „*Umgebung von* P_0" jede Teilmenge von $\mathfrak{P}$, deren Komplementärmenge bezüglich $\mathfrak{P}$ den Punkt P_0 weder enthält noch zum Häufungspunkt hat.

---

[10]) Zu dieser Bezeichnungsweise vgl. H. Tietze—L. Vietoris, l. c.[1]), Anmerkung [33a]).

[11]) Wegen dieser Definitionen sowie der folgenden Definitionen und Behauptungen in dieser und der nächsten Nummer vgl. H. Tietze—L. Vietoris, l. c.[1]), Nr. 3.

Sind andererseits in $\mathfrak{P}$ wie in Nr. 4 Umgebungen erklärt und nennt man, wenn P_0 irgendeinen Punkt von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{A}$ irgendeine Teilmenge von $\mathfrak{P}$ bezeichnet, P_0 in $\mathfrak{P}$ „*Häufungspunkt von* $\mathfrak{A}$“ dann und nur dann, falls in jeder Umgebung von P_0 unendlich viele Punkte von $\mathfrak{A}$ liegen, oder, was im $\mathfrak{R}^n$ offenbar dasselbe besagt, falls in jeder Umgebung von P_0 mindestens ein von P_0 verschiedener Punkt von $\mathfrak{A}$ liegt [12]), so ergeben sich damit in $\mathfrak{P}$ Häufungsbeziehungen, die denen von Nr. 4 völlig gleichwertig sind.

Diese Feststellungen sind für später (vgl. Nr. 8, 9) von Bedeutung.

6. Den weiteren Ausführungen seien nunmehr die folgenden Begriffe zugrundegelegt:

Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen ganz beliebiger Art — die Elemente seien der Einfachheit halber als „*Punkte*“ bezeichnet, brauchen aber keineswegs gerade Punkte des $\mathfrak{R}^n$ zu bedeuten — werde „*Umgebungsraum*“ genannt, wenn zu jedem Punkt P von $\mathfrak{M}$ und zu jeder Teilmenge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{M}$ angegeben ist, ob $\mathfrak{A}$ als „*Umgebung von* P“ betrachtet werden soll oder nicht.

Es heiße eine Menge $\mathfrak{M}$ von irgendwelchen Elementen — die wieder kurz „*Punkte*“ genannt seien — „*Häufungsraum*“, wenn zu jedem Punkt P von $\mathfrak{M}$ und zu jeder Teilmenge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{M}$ angegeben ist, ob P als „*Häufungspunkt von* $\mathfrak{A}$“ bezeichnet werden soll oder nicht.

7. Diese Begriffe des Umgebungsraumes und Häufungsraumes stellen wesentliche Verallgemeinerungen der bei H. Tietze—L. Vietoris, l. c. [1]) definierten entsprechenden Raumbegriffe dar. Dort [13]) wird unter einem „*topologischen Raum*“ oder „*Umgebungsraum*“ oder „*Raum* $\mathfrak{T}$“ eine Menge $\mathfrak{M}$ verstanden, für deren Elemente — wie vorhin kurz „*Punkte*“ geheißen — Festsetzungen von folgender Art getroffen sind:

I. Den Punkten P von $\mathfrak{M}$ sind gewisse Teilmengen von $\mathfrak{M}$ zugewiesen, „*Umgebungen von* P“ genannt und mit $\mathfrak{U}(P)$ bezeichnet.

II. Dabei sind folgende Forderungen („*Axiome der Umgebung*“) erfüllt:

($\bar{A}$). *a*) Zu jedem Punkt P von $\mathfrak{M}$ gibt es mindestens eine $\mathfrak{U}(P)$;

b) jede $\mathfrak{U}(P)$ enthält P.

($\bar{B}$). *a*) Jede eine $\mathfrak{U}(P)$ enthaltende Menge $\mathfrak{V}$ ist selbst eine Umgebung von P;

b) desgleichen der Durchschnitt $\mathfrak{U}_1(P) \cdot \mathfrak{U}_2(P)$ zweier Umgebungen von P.

---

[12]) Der Zusatz „*von* P_0 *verschieden*“ ist natürlich wesentlich für die Gleichwertigkeit beider Definitionen.

[13]) Vgl. H. Tietze—L. Vietoris, l. c. [1]), Nr. 8.

($\bar{C}$). Ist die Menge $\mathfrak{U}$ eine Umgebung von P, so ist es auch die Menge aller „*inneren*“ Punkte von $\mathfrak{U}$, d. h. aller jener Punkte X, für welche $\mathfrak{U}$ eine Umgebung von X ist.

($\bar{D}$). Ist $P \neq Q$, so gibt es Umgebungen $\mathfrak{U}(P), \mathfrak{V}(Q)$ ohne gemeinsamen Punkt[14]).

Als „*Raum mit Festsetzungen über Häufungspunkte*“ oder „*Raum* $\mathfrak{H}$“ wird bei H. Tietze—L. Vietoris, l. c.[1]), Nr. 7 eine Menge $\mathfrak{M}$ bezeichnet, für deren Elemente („*Punkte*“) und Teilmengen Folgendes festgelegt ist:

I. Zu jeder in $\mathfrak{M}$ enthaltenen Menge $\mathfrak{A}$ und zu jedem Punkt P von $\mathfrak{M}$ ist angegeben, ob P als „*Häufungspunkt von* $\mathfrak{A}$“ zu bezeichnen ist oder nicht.

II. Dabei sind folgende Forderungen („*Axiome des Häufungspunktes*“) erfüllt:

(*1*). Ein Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ ist auch Häufungspunkt jeder $\mathfrak{A}$ enthaltenden Menge aus $\mathfrak{M}$.

(*2*). Für jede Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in zwei Teilmengen: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ ist jeder Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ zugleich Häufungspunkt wenigstens einer der Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$.

(*3*). Eine nur aus einem Punkte bestehende Menge hat keinen Häufungspunkt.

(*4*). Jeder Häufungspunkt von Häufungspunkten einer Menge ist selbst Häufungspunkt derselben.

Für die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Begriffe Umgebungsraum und Häufungsraum werden somit jeweils nur die obigen Forderungen I. gestellt, nicht aber brauchen die Axiome der Umgebung bzw. des Häufungspunktes erfüllt zu sein[15]).

---

[14]) Vielfach wird auch ($\bar{D}$) ersetzt durch das schwächere Axiom:

($\bar{D}_0$). Zu irgend zwei Punkten P und Q gibt es mindestens eine Umgebung von P, die Q nicht enthält.

[15]) Wie allgemein der in der vorliegenden Arbeit zugrundegelegte Begriff Umgebungsraum ist, geht schon daraus hervor, daß ein Punkt überhaupt keine Umgebung zu besitzen und, wenn er eine besitzt, ihr nicht anzugehören braucht; sogar die leere Menge ist als Umgebung möglich.

Die Allgemeinheit des Begriffes Häufungsraum erhellt unmittelbar daraus, daß eine endliche Menge, sogar eine nur aus einem Punkt bestehende Menge, ja sogar die leere Menge sehr wohl einen Häufungspunkt haben kann.

Beispiele von Umgebungsräumen siehe unter Nr. **16**, **17**, **26** und **32**, von Häufungsräumen unter Nr. **22**, **26** und **32**.

M. Fréchet[16]) verwendet in seinen „*Räumen V*“ einen Begriff des Umgebungsraumes, für den neben der obigen Bedingung I. für Räume $\mathfrak{T}$ auch noch die Gültigkeit des Axioms $(\bar{A})$ gefordert wird. Nimmt man außerdem noch das Axiom (Ba) hinzu, so erhält man einen Begriff des Umgebungsraumes, wie ihn Seifert—Threlfall[17]) gebrauchen.

W. O. Gordon[18]) legt einen Begriff des Umgebungsraumes zugrunde, der sich mit dem der vorliegenden Arbeit vollständig deckt. Auch der bei P. Alexandroff—H. Hopf[19]) eingeführte Umgebungsraum ist dem der vorliegenden Arbeit gleichwertig, wenn auch der Umgebungsbegriff bei P. Alexandroff—H. Hopf nicht eigentlich Selbstzweck ist, sondern nur als passender Durchgangsbegriff zu dem auf der „*abgeschlossenen Hülle*“ fußenden sogenannten „*allgemein-topologischen Raum*“ erscheint.

Dem Begriff des Häufungsraumes der vorliegenden Arbeit dem Inhalt nach völlig gleichwertig und nur in der Form davon verschieden sind die von W. Sierpiński[20]) und E. W. Chittenden[21]) eingeführten Raumbegriffe. W. Sierpiński betrachtet eine irgendwie gegebene Menge $\mathfrak{M}$ von an sich ganz willkürlichen Elementen, für die ein Gesetz vorhanden ist, das jeder Menge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{M}$ eine Menge $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{M}$ eindeutig zuweist. $\mathfrak{A}'$ heißt „*Ableitung von* $\mathfrak{A}$“. Spezielle Annahmen über das Gesetz dieser Zuordnung werden nicht gemacht. — E. W. Chittenden bezeichnet als „*Raum*“ oder „*topologischen Raum*“ ein System $(\mathfrak{M}, k)$, das sich zusammensetzt aus einer Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen beliebiger Art und einer Beziehung k zwischen Teilmengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{M}$. Dabei ist die Menge $\mathfrak{A}'$ (= Ableitung von $\mathfrak{A}$) für jede beliebige Menge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{M}$ eindeutig bestimmt. — Der Chittendensche Raum wird auch bei R. Stephens[22]) zugrundegelegt.

8. Wir kehren zu den in Nr. **6** definierten Raumbegriffen zurück; im Folgenden werden unter „*Umgebungsraum*“ und „*Häufungsraum*“ ausschließlich die in Nr. **6** erklärten Begriffe verstanden. In Anlehnung an die Bezeichnungsweise bei H. Tietze—L. Vietoris[23]) seien dabei

---

[16]) M. Fréchet, Fund. math. 10 (1927) S. 328, 14 (1929) S. 118.
[17]) Seifert—Threlfall, l. c. [1]).
[18]) W. O. Gordon, l. c. [1]).
[19]) P. Alexandroff—H. Hopf, l. c. [1]), S. 30.
[20]) W. Sierpiński, l. c. [1]).
[21]) E. W. Chittenden, l. c. [1]).
[22]) R. Stephens, l. c. [1]).
[23]) Vgl. Nr. **7** dieser Arbeit.

Umgebungsräume stets mit dem Buchstaben $\mathfrak{T}$ (bzw. $\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots$), Häufungsräume stets mit dem Buchstaben $\mathfrak{H}$ (bzw. $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots$) bezeichnet.

Wir wollen nun in Umgebungsräumen Häufungspunkte, in Häufungsräumen Umgebungen festlegen. Das soll in dieser Arbeit stets durch die folgenden Definitionen geschehen:

Definition.

1. Ist P ein beliebiger Punkt eines Umgebungsraumes $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{A}$ irgendeine Menge von $\mathfrak{T}$, so heiße P „*Häufungspunkt von* $\mathfrak{A}$“ dann und nur dann, wenn es in jeder Umgebung von P mindestens einen von P verschiedenen Punkt von $\mathfrak{A}$, d. h. mindestens einen Punkt von $\mathfrak{A}-\{P\}$ [24]) gibt.

2. Ist P ein beliebiger Punkt eines Häufungsraumes $\mathfrak{H}$, dann heiße „*Umgebung von* P“ jede Menge von $\mathfrak{H}$, deren Komplementärmenge bezüglich $\mathfrak{H}$ den Punkt P weder enthält noch zum Häufungspunkt hat.

9. Diese Definitionen von Häufungspunkten in Umgebungsräumen und von Umgebungen in Häufungsräumen erscheinen auf Grund der Darlegungen unter Nr. **5** sowohl naheliegend als auch sinnvoll, und zwar aus folgendem Grunde:

Werden in einer Menge $\mathfrak{P}$ des $\mathfrak{R}^n$ so wie in Nr. **4** Umgebungen erklärt, so kann $\mathfrak{P}$ natürlich auch als Umgebungsraum angesprochen werden. An eine vernünftige Definition von Häufungselementen in Umgebungsräumen wird man nun die Forderung stellen, daß sie sich bei Anwendung auf eine Menge des $\mathfrak{R}^n$, die als Umgebungsraum aufgefaßt wird, mit der für Mengen des $\mathfrak{R}^n$ üblichen Erklärung von Häufungspunkten (vgl. Nr. **4**) völlig deckt, — eine Forderung, die die in Nr. **8** gegebene Definition von Häufungspunkten in Umgebungsräumen gemäß den Ausführungen unter Nr. **5** ja sicher erfüllt.

Entsprechend wird eine sinnvolle Definition von Umgebungen in Häufungsräumen der Forderung genügen müssen, daß sie sich in dem Spezialfall einer Menge des $\mathfrak{R}^n$, die ja als Häufungsraum aufgefaßt werden kann, wenn in ihr so wie in Nr. **4** Häufungspunkte festgelegt werden, mit der für Mengen des $\mathfrak{R}^n$ herkömmlichen Erklärung von Umgebungen (vgl. Nr. **4**) deckt, — eine Forderung, der gemäß den Darlegungen unter Nr. **5** die in Nr. **8** gegebene Definition von Umgebungen in Häufungsräumen sicher genügt.

Selbstverständlich liegt nicht etwa eine zwingende Notwendigkeit vor, die Definition von Häufungselementen in Umgebungsräumen oder

[24]) Man beachte die in Nr. **3** getroffene Verabredung, daß $\mathfrak{A}-\{P\}=\mathfrak{A}$, wenn P nicht Punkt von $\mathfrak{A}$ ist.

von Umgebungen in Häufungsräumen gerade so vorzunehmen, wie es in Nr. 8 geschehen ist. Beispielsweise könnte für die Festlegung von Häufungspunkten in Umgebungsräumen auch folgende Definition gewählt werden: „Ist P ein beliebiger Punkt eines Umgebungsraumes $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{A}$ irgendeine Menge von $\mathfrak{T}$, so heiße P Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ dann und nur dann, wenn es in jeder Umgebung von P unendlich viele Punkte von $\mathfrak{A}$ gibt." Diese Definition[25]) ist ebenfalls in dem oben genannten Sinne als vernünftig zu bezeichnen; nach den Feststellungen in Nr. 5 ist sie ja in Punktmengen des $\mathfrak{R}^n$ der Definition, die gemäß Nr. 8 unseren weiteren Betrachtungen zugrundegelegt werden soll, völlig gleichwertig. Sie ist jedoch der Allgemeinheit der verwendeten Raumbegriffe (über die man etwa Anmerkung [15]) vergleiche) weniger gut angepaßt als die Definition von Nr. 8, da sie, um nur eines zu erwähnen, zur Folge hat, daß eine endliche Menge niemals einen Häufungspunkt aufweist. Im übrigen werden wir uns mit dieser Definition in Nr. **34** noch beschäftigen.

Von ganz anderer Art als die angeführten beiden Möglichkeiten der Festlegung von Häufungselementen in Umgebungsräumen ist die bei W. O. Gordon, l. c.[1]) verwendete Definition des Häufungspunktes — dort als „*limit point*" bezeichnet —, die folgendermaßen lautet: „Ein Punkt P eines Umgebungsraumes $\mathfrak{T}$ ist dann und nur dann Häufungspunkt einer Menge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{T}$, wenn $\mathfrak{T}-\mathfrak{A}$ nicht Umgebung von P ist." Diese Definition hat *nicht* die Eigenschaft, daß sie sich bei Anwendung auf eine Menge des $\mathfrak{R}^n$, die als Umgebungsraum aufgefaßt wird, mit der für Mengen des $\mathfrak{R}^n$ üblichen Erklärung von Häufungspunkten (vgl. Nr. **4**) deckt; vielmehr ist sie, wie man sich leicht überlegt, für eine als Umgebungsraum aufgefaßte Menge $\mathfrak{P}$ des $\mathfrak{R}^n$ gleichwertig der folgenden Definition[26]): „Ein Punkt P von $\mathfrak{P}$ ist dann und nur dann Häufungspunkt einer Menge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{P}$, wenn in jeder Umgebung von P mindestens ein — nicht notwendig von P verschiedener! — Punkt von $\mathfrak{A}$ liegt." Die W. O. Gordonsche Definition wird in den Nr. **25** und **26** noch eine Rolle spielen[27]).

[25]) Sie wird im übrigen von H. Tietze—L. Vietoris, l. c.[1]), Nr. 8 in den dortigen topologischen Räumen verwendet.

[26]) Es sei bemerkt, daß in Umgebungsräumen allgemeinerer Art diese Gleichwertigkeit nicht bestehen muß.

[27]) Die von uns in Nr. 8 gewählte und den weiteren Ausführungen dieser Arbeit zugrundeliegende Definition von Häufungspunkten in Umgebungsräumen wird auch von M. Fréchet in seinen Räumen V — vgl. M. Fréchet, Les espaces abstraits, Paris 1928, S. 172 — und weiter auch von L. Vietoris, Monatsh. Math. u. Phys. 31 (1921) S. 175 gebraucht.

10. $\mathfrak{T}_0$ sei ein beliebiger Umgebungsraum. Werden in $\mathfrak{T}_0$ so wie in Nr. 8 Häufungspunkte erklärt, so läßt sich damit, wie bereits in Nr. 9 erwähnt wurde, $\mathfrak{T}_0$ auch als Häufungsraum betrachten, und zwar auf eindeutig bestimmte Weise. Mit anderen Worten: Durch die genannten Häufungspunktfestsetzungen leitet sich aus dem Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ eindeutig ein gewisser Häufungsraum ab, der im Folgenden der *„dem Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ zugeordnete Häufungsraum“* genannt und mit $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$[28]) bezeichnet sein möge.

Legt man andererseits in einem beliebigen Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ wie in Nr. 8 Umgebungen fest, so kann damit $\mathfrak{H}_0$ offenbar auch als ein ganz bestimmter Umgebungsraum aufgefaßt werden; er sei entsprechend der vorigen Ausdrucks- und Bezeichnungsweise der *„dem Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ zugeordnete Umgebungsraum“* genannt und mit $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ bezeichnet.

Ist $\mathfrak{T}_0$ irgendein Umgebungsraum, $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ der zugeordnete Häufungsraum, so gibt es wie für jeden Häufungsraum auch für den Häufungsraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ einen zugeordneten Umgebungsraum. In folgerichtiger Weiterführung der obigen Bezeichnungsart sei er mit $\mathfrak{T}[\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)]$, der Kürze halber auch mit $\mathfrak{T}_1$ bezeichnet. Da $\mathfrak{T}_1$ über den Häufungsraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ letzten Endes eindeutig aus dem Ausgangsraum $\mathfrak{T}_0$ sich ableitet, sei er auch der *„dem Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ zugeordnete Umgebungsraum“* genannt.

In analoger Weise werde, wenn $\mathfrak{H}_0$ irgendeinen Häufungsraum, $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ den zugeordneten Umgebungsraum und $\mathfrak{H}[\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)] = \mathfrak{H}_1$ den diesem Umgebungsraum zugeordneten Häufungsraum darstellt, der Raum $\mathfrak{H}_1$ auch der *„dem Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ zugeordnete Häufungsraum“* genannt.

Es ist natürlich klar, sei aber an dieser Stelle ausdrücklich hervorgehoben, daß die Eigenschaften, die die zugeordneten Räume allenfalls besitzen und die in den folgenden Paragraphen näher untersucht werden sollen, außer von den Eigenschaften der Ausgangsräume vor allem auch von den Festsetzungen abhängen, durch die die Zuordnung zwischen den Räumen hergestellt wird. Andersgeartete Umgebungs- bzw. Häufungspunkterklärungen werden im allgemeinen andere Eigenschaften der zugeordneten Räume zur Folge haben[29]). Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Festsetzungen haben allerdings den

---

[28]) Diese Bezeichnungsweise ist gewählt, um die Herkunft des Häufungsraumes aus dem Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ und damit seine Abhängigkeit von $\mathfrak{T}_0$ zum Ausdruck zu bringen.

[29]) Vgl. diesbezüglich die Ausführungen in Nr. **34**.

Vorteil, daß sie besonders einfach zu handhaben und an sich naheliegend sind.

§ 3. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Identität zwischen Umgebungsraum und zugeordnetem Umgebungsraum.

11. Ist $\mathfrak{T}_0$ irgendein Umgebungsraum, $\mathfrak{T}_1$ der zugeordnete Umgebungsraum, so besitzen $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{T}_1$ die gleichen Elemente; die Umgebungsbeziehungen jedoch sind für beide Räume in verschiedener Weise festgelegt. Es ist demnach zu unterscheiden zwischen den Umgebungen „*in* $\mathfrak{T}_0$“, die an sich ganz willkürlich sind, und den Umgebungen „*in* $\mathfrak{T}_1$“, die letzten Endes über die Häufungsbeziehungen des zwischengeschalteten, dem Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ zugeordneten Häufungsraumes $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ wieder von den Umgebungen in $\mathfrak{T}_0$ abhängen. Wir gebrauchen die Abkürzungen: $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ bedeute „*Umgebung von P in* $\mathfrak{T}_0$“, $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$ bedeute „*Umgebung von P in* $\mathfrak{T}_1$“.

Es liegt die Frage nahe, ob für jeden beliebigen Punkt P beider Räume $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{T}_1$ [30]) jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ auch eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$ und umgekehrt jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$ auch eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ ist. In diesem Falle seien die beiden Räume $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{T}_1$ als „*identisch*“ bezeichnet.

12. Schon aus der Tatsache, daß für einen Punkt P von $\mathfrak{T}_0$ als $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ die leere Menge auftreten kann [31]), während als $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$ die leere Menge offenbar unmöglich ist [32]), ergibt sich, daß $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_0$ nicht in *jedem* Falle, d. h. nicht für *jeden* Ausgangsraum $\mathfrak{T}_0$, identisch sind.

Somit erwächst die Aufgabe, anzugeben, unter welchen Bedingungen ein Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ und der ihm zugeordnete Umgebungsraum $\mathfrak{T}_1$ identisch sind.

Die Aufgabe wird gelöst durch folgenden Satz:

Satz 1. Ist $\mathfrak{T}_0$ *irgendein Umgebungsraum,* $\mathfrak{T}_1$ *der zugeordnete Umgebungsraum, so ist dann und nur dann* $\mathfrak{T}_1$ *identisch* $\mathfrak{T}_0$, *wenn* $\mathfrak{T}_0$ *die folgenden Eigenschaften besitzt:*

---

[30]) Da $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{T}_1$ hinsichtlich ihrer Elemente völlig gleichwertig sind, so sei im Folgenden einfach immer von Punkten bzw. Mengen „*von* $\mathfrak{T}_0$“ gesprochen, wenn es sich darum handelt, auszudrücken, daß ein Punkt oder eine Menge beiden Räumen angehört.

[31]) Vgl. [15]).

[32]) Angenommen, für einen Punkt P von $\mathfrak{T}_0$ sei die leere Menge eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$. Dann enthält nach Definition der Umgebung in $\mathfrak{T}_1$ die Komplementärmenge der leeren Menge bezüglich $\mathfrak{T}_0$ den Punkt P nicht. Besagte Komplementärmenge ist aber der Raum $\mathfrak{T}_0$ selbst und P ist voraussetzungsgemäß Punkt von $\mathfrak{T}_0$. Die Annahme ist also falsch.

(t_1). *Jede* $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ *eines jeden Punktes* P *von* $\mathfrak{T}_0$ *enthält* P.

(t_2). *Für jeden Punkt* P *von* $\mathfrak{T}_0$ *ist jede eine* $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ *umfassende Menge von* $\mathfrak{T}_0$ *selbst Umgebung von* P *in* $\mathfrak{T}_0$ [33]).

13. Beweis zu Satz *1* (1. Teil). Wir zeigen: Die Bedingungen (t_1), (t_2) sind notwendig für die Identität; d. h. ist $\mathfrak{T}_1$ identisch $\mathfrak{T}_0$, ist also für jeden Punkt P von $\mathfrak{T}_0$ jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ auch eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$ und jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$ auch eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$, dann besitzt der Raum $\mathfrak{T}_0$ die Eigenschaften (t_1), (t_2).

Das ist augenscheinlich dann erwiesen, wenn gezeigt werden kann, daß der Raum $\mathfrak{T}_1$ stets diese Eigenschaften hat, d. h. daß die Umgebungsbeziehungen von $\mathfrak{T}_1$ stets den Bedingungen (t_1), (t_2) — ausgesprochen jetzt für die Umgebungen in $\mathfrak{T}_1$ — genügen, wie immer die Umgebungen in $\mathfrak{T}_0$ beschaffen sein mögen. Dies ist aber in der Tat der Fall:

Es sei P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{A}$ eine beliebige $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$, $\mathfrak{B}$ eine beliebige Menge von $\mathfrak{T}_0$, die $\mathfrak{A}$ enthält. Nach Definition der Umgebung in $\mathfrak{T}_1$ enthält $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}$ den Punkt P nicht und hat P nicht zum Häufungspunkt. P ist also nicht Punkt von $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}$, demnach Punkt von $\mathfrak{A}$; (t_1) ist somit für die Umgebungen in $\mathfrak{T}_1$ erfüllt.

P ist ferner nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}$; d. h. laut Erklärung der Häufungspunkte in $\mathfrak{T}_0$: nicht in jeder $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ liegt mindestens ein Punkt von $(\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}) - \{P\}$. Es gibt also eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ — sie sei mit $\mathfrak{U}_0$ bezeichnet —, der kein Punkt von $(\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}) - \{P\}$ angehört. Wegen $(\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{B}) - \{P\} \subseteq (\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}) - \{P\}$ gibt es in $\mathfrak{U}_0$ auch keinen Punkt von $(\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{B}) - \{P\}$. Andererseits gehört P zu $\mathfrak{A}$ und wegen $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ auch zu $\mathfrak{B}$, also nicht zu $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{B}$. Somit ist P weder Häufungspunkt noch Punkt von $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{B}$; $\mathfrak{B}$ ist demnach eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$, ($t_2$) also für die Umgebungen in $\mathfrak{T}_1$ erfüllt.

14. Beweis zu Satz *1* (2. Teil). Wir zeigen: Daß der Raum $\mathfrak{T}_0$ die Eigenschaften (t_1), (t_2) besitzt, ist hinreichend für die Identität; d. h. genügen die Umgebungen in $\mathfrak{T}_0$ diesen Bedingungen, dann ist für jeden Punkt P von $\mathfrak{T}_0$ jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ auch eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$ und umgekehrt jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$ auch eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$.

1. Es sei P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{A}$ eine beliebige $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$. Wegen der Gültigkeit von (t_1) ist P Punkt von $\mathfrak{A}$, also nicht Punkt von $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}$. P ist aber auch nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}$; denn

---

[33]) Mit anderen Worten: Die Umgebungsbeziehungen des Raumes $\mathfrak{T}_0$ müssen den Umgebungsaxiomen $(\overline{A}\,a)$ und $(\overline{B}\,b)$ genügen (vgl. Nr. 7).

$\mathfrak{A}$ ist eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$, in der kein Punkt von $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}$ und, da $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A} = (\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}) - \{P\}$ ist, auch kein Punkt von $(\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}) - \{P\}$ liegt. P ist also weder Punkt noch Häufungspunkt von $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}$ ist somit eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$, w. z. b. w.

2. P sei wieder ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{A}$ sei jetzt eine beliebige $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$. Definitionsgemäß ist daher P weder Punkt noch Häufungspunkt von $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}$. Laut Definition des Häufungspunktes in $\mathfrak{T}_0$ gibt es demnach eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ — sie sei $\mathfrak{U}_0$ genannt —, in der kein Punkt von $(\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}) - \{P\}$ vorhanden ist, die aber auch keinen Punkt von $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}$ enthält, da P nicht Punkt von $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}$ und somit $(\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}) - \{P\} = \mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}$ ist. $\mathfrak{U}$ gehört daher ganz zu $\mathfrak{A}$. Wegen (t_2) ist jede eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ umfassende Menge selbst eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$; insbesondere ist also die $\mathfrak{U}_0$ umfassende Menge $\mathfrak{A}$ eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$, w. z. b. w.

15. Betrachtet man die Darlegungen unter Nr. **14**, 1 genauer, dann fällt auf, daß dort von den für den Raum $\mathfrak{T}_0$ vorausgesetzten Eigenschaften (t_1), (t_2) nur (t_1) zur Verwendung kommt. Es erweist sich also mit anderen Worten die Eigenschaft (t_1) hinreichend dafür, daß für jeden Punkt P von $\mathfrak{T}_0$ jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ auch eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$ ist. (t_1) ist hierfür aber auch notwendig: Wird nämlich vorausgesetzt, daß für jedes P von $\mathfrak{T}_0$ jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ zugleich eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$ ist, so muß $\mathfrak{T}_0$ die Eigenschaft (t_1) haben, da jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$ stets P enthält[34]). Es gilt also der folgende Satz:

Satz 2. Ist $\mathfrak{T}_0$ irgendein Umgebungsraum, $\mathfrak{T}_1$ der zugeordnete Umgebungsraum, so ist dann und nur dann für jeden Punkt P von $\mathfrak{T}_0$ jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ auch eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$, wenn $\mathfrak{T}_0$ die Eigenschaft (t_1) besitzt.

Entsprechend zeigt die genauere Betrachtung der Ausführungen unter Nr. **14**, 2: Die Eigenschaft (t_2) ist hinreichend dafür, daß für jedes P von $\mathfrak{T}_0$ jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$ auch eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ darstellt. Notwendig ist (t_2) hierfür jedoch nicht, wie in Nr. **16** bewiesen werden wird. Es gilt somit der folgende Satz:

Satz 3. $\mathfrak{T}_0$ sei irgendein Umgebungsraum, $\mathfrak{T}_1$ der zugeordnete Umgebungsraum. Damit für jeden Punkt P von $\mathfrak{T}_0$ jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$ zugleich auch eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ darstellt, ist hinreichend, aber nicht notwendig, daß $\mathfrak{T}_0$ die Eigenschaft (t_2) besitzt.

16. Wir haben also zu zeigen: Die Eigenschaft (t_2) ist nicht notwendig dafür, daß für jeden Punkt P von $\mathfrak{T}_0$ jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$ auch

[34]) Der Raum $\mathfrak{T}_1$ besitzt ja gemäß Nr. **13** stets die Eigenschaft (t_1) — ausgesprochen naturgemäß für die Umgebungen in $\mathfrak{T}_1$—.

eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ ist. Der Beweis wird dadurch erbracht, daß ein Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ angegeben wird, bei dem für jeden Punkt P von $\mathfrak{T}_0$ jede Umgebung von P im zugeordneten Umgebungsraum $\mathfrak{T}_1$ auch Umgebung von P in $\mathfrak{T}_0$ ist, der aber die Eigenschaft (t_2) nicht besitzt. Die folgenden Beispiele *1* und *2* liefern je einen derartigen Umgebungsraum.

Beispiel 1. Es bedeute $\mathfrak{M}=\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ mit $n\geqq 1$ eine endliche Menge von irgendwelchen voneinander verschiedenen Elementen („*Punkten*") P_ν. Wir setzen fest: P_0 besitze keine Umgebung; Umgebung von P_1 sei die leere Menge und außerdem jede Menge aus $\mathfrak{M}$, die P_1 enthält; Umgebung von P_ν $(\nu=2, 3, \ldots, n)$ sei jede Menge aus $\mathfrak{M}$, die P_ν enthält.

Mit diesen Erklärungen ist $\mathfrak{M}$ ein Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$. Die eben festgelegten Umgebungsbeziehungen sind die „$\mathfrak{U}(P_\nu|\mathfrak{T}_0)$". $\mathfrak{T}_1$ bedeute den dem Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ zugeordneten Umgebungsraum. Dann lassen sich folgende Aussagen machen:

P_0 ist Häufungspunkt von jeder beliebigen Menge aus $\mathfrak{T}_0$, auch von der leeren Menge [35]; nach Definition der Umgebung in $\mathfrak{T}_1$ gibt es daher eine $\mathfrak{U}(P_0|\mathfrak{T}_1)$ nicht.

P_ν ist für $\nu\neq 0$ von keiner Menge aus $\mathfrak{T}_0$ Häufungspunkt, da P_ν für $\nu\neq 0$ die Menge $\{P_\nu\}$ als Umgebung besitzt [36]. Somit ist jede Menge von $\mathfrak{T}_0$, die P_ν $(\nu\neq 0)$ enthält, und nur jede derartige Menge, eine $\mathfrak{U}(P_\nu|\mathfrak{T}_1)$; denn die Komplementärmenge jeder solchen und nur jeder solchen Menge erfüllt zugleich beide, die Umgebungen in $\mathfrak{T}_1$ charakterisierenden Forderungen: Sie enthält P_ν nicht und hat P_ν nicht zum Häufungspunkt.

Jede Menge von $\mathfrak{T}_0$, der P_ν für $\nu\neq 0$ angehört, ist aber — laut Erklärung der Umgebungen in $\mathfrak{T}_0$ — auch eine $\mathfrak{U}(P_\nu|\mathfrak{T}_0)$. Es stellt also für jeden Punkt P_ν $(\nu=0, 1, 2, \ldots, n)$ jede $\mathfrak{U}(P_\nu|\mathfrak{T}_1)$ zugleich eine $\mathfrak{U}(P_\nu|\mathfrak{T}_0)$ dar [37]. Der Raum $\mathfrak{T}_0$ besitzt jedoch die Eigenschaft (t_2)

---

[35]) Das folgt unmittelbar aus der Definition von Häufungspunkten in $\mathfrak{T}_0$. Im übrigen ergeben sich für *jeden beliebigen* Umgebungsraum $\mathfrak{T}$ als einfache Folgerungen aus der Definition von Häufungspunkten in $\mathfrak{T}$ ohne weiteres die folgenden Tatsachen:

1. Ein Punkt P von $\mathfrak{T}$, der keine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T})$ besitzt, ist Häufungspunkt von jeder Menge aus $\mathfrak{T}$, auch von der leeren Menge.

2. Ein Punkt P von $\mathfrak{T}$, der eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T})$ besitzt, ist sicher nicht Häufungspunkt der leeren Menge und der Menge $\{P\}$. Hat P als $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T})$ die leere Menge oder die Menge $\{P\}$, so ist P sogar von keiner Menge aus $\mathfrak{T}$ Häufungspunkt.

[36]) Vgl. Anm. [35]) 2.

[37]) Die Aussage gilt, wie ausdrücklich bemerkt sei, auch für $\nu=0$.

nicht; denn nicht für *jeden* Punkt P_ν ist *jede* eine $\mathfrak{U}(P_\nu|\mathfrak{T}_0)$ umfassende Menge selbst eine $\mathfrak{U}(P_\nu|\mathfrak{T}_0)$: Betrachten wir nämlich den Punkt P_1 und die Menge $\{P_0\}$: die leere Menge ist eine $\mathfrak{U}(P_1|\mathfrak{T}_0)$, die die leere Menge umfassende Menge $\{P_0\}$ aber nicht.

Es ist somit ein Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ gefunden, in dem für jeden Punkt P von $\mathfrak{T}_0$ jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$ auch eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ darstellt, der aber die Eigenschaft (t_2) nicht besitzt, w. z. b. w.

17. Einen etwas andersgearteten Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$, für den jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_1)$ eines jeden Punktes P von $\mathfrak{T}_0$ auch eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ ist, der aber die Eigenschaft (t_2) nicht erfüllt, liefert das folgende Beispiel:

Beispiel 2. Gegeben sei ein Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$, bestehend wieder aus der endlichen Menge $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, diesmal mit $n \geqq 2$ und folgenden Festsetzungen von Umgebungen:

$\mathfrak{U}(P_0|\mathfrak{T}_0)$ sei jede Menge von $\mathfrak{T}_0$, der mindestens ein von P_0 verschiedener Punkt von $\mathfrak{T}_0$ angehört; $\mathfrak{U}(P_1|\mathfrak{T}_0)$ sei die Menge $\{P_0\}$ und jede Menge von $\mathfrak{T}_0$, die P_1 enthält; $\mathfrak{U}(P_\nu|\mathfrak{T}_0)$ sei für $\nu = 2, 3, \ldots, n$ jede Menge von $\mathfrak{T}_0$, die P_ν enthält. $\mathfrak{T}_1$ bedeute den dem Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ zugeordneten Umgebungsraum.

Als Häufungspunkt irgendeiner Menge von $\mathfrak{T}_0$ kann überhaupt nur P_0 in Betracht kommen[38]), und zwar ist P_0 Häufungspunkt vom ganzen Raum $\mathfrak{T}_0$ und von der Menge $\mathfrak{T}_0 - \{P_0\}$; in jeder $\mathfrak{U}(P_0|\mathfrak{T}_0)$ liegt ja mindestens ein Punkt $P_\nu \neq P_0$ und also mindestens ein von P_0 verschiedener Punkt der genannten Mengen. P_0 ist aber auch nur von diesen beiden Mengen Häufungspunkt: Jeder Menge $\mathfrak{A}$, die von den genannten Mengen sich unterscheidet, gehört mindestens ein Punkt $P_\nu \neq P_0$ nicht an — der Punkt sei mit P_{ν_0} bezeichnet —; die Menge $\{P_{\nu_0}\}$ stellt aber dann eine $\mathfrak{U}(P_0|\mathfrak{T}_0)$ dar, in der kein — und damit auch kein von P_0 verschiedener — Punkt von $\mathfrak{A}$ liegt; P_0 ist also nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$.

Somit sind die Umgebungen in $\mathfrak{T}_1$ folgendermaßen gegeben: $\mathfrak{U}(P_\nu|\mathfrak{T}_1)$ ist für $\nu \neq 0$ jede Menge von $\mathfrak{T}_0$, zu der P_ν gehört, und nur jede derartige Menge; denn die Komplementärmengen dieser und nur dieser Mengen enthalten den Punkt P_ν nicht und haben P_ν natürlich auch nicht zum Häufungspunkt, da ja P_ν für $\nu \neq 0$ überhaupt von keiner Menge Häufungspunkt ist. $\mathfrak{U}(P_0|\mathfrak{T}_1)$ ist jede und nur jede Menge von $\mathfrak{T}_0$, der P_0 und noch mindestens ein weiterer Punkt von $\mathfrak{T}_0$ angehört; die Komplementärmenge $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}$ jeder solchen und nur jeder

[38]) Weil für jeden Punkt $P_\nu \neq P_0$ die Menge $\{P_\nu\}$ eine $\mathfrak{U}(P_\nu|\mathfrak{T}_0)$ darstellt. Vgl. Anm. [35]) 2.

solchen Menge $\mathfrak{A}$ enthält nämlich P_0 nicht — P_0 gehört ja zu $\mathfrak{A}$ — und hat zugleich auch P_0 nicht zum Häufungspunkt, weil $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}$ verschieden ist von den Mengen $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{T}_0 - \{P_0\}$.

Jede der so für $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ als $\mathfrak{U}(P_\nu | \mathfrak{T}_1)$ erkannten Mengen von $\mathfrak{T}_0$ ist aber — laut Erklärung der Umgebungen in $\mathfrak{T}_0$ — auch eine $\mathfrak{U}(P_\nu | \mathfrak{T}_0)$. Der Raum $\mathfrak{T}_0$ besitzt jedoch die Eigenschaft (t_2) nicht: Betrachten wir nämlich den Punkt P_1 und die Menge $\{P_0, P_2\}$; die Menge $\{P_0\}$ ist eine $\mathfrak{U}(P_1 | \mathfrak{T}_0)$, die diese Menge umfassende Menge $\{P_0, P_2\}$ aber nicht.

Es stellt somit auch in diesem Beispiel $\mathfrak{T}_0$ einen Umgebungsraum dar, in dem für jeden Punkt P von $\mathfrak{T}_0$ jede $\mathfrak{U}(P | \mathfrak{T}_1)$ auch eine $\mathfrak{U}(P | \mathfrak{T}_0)$ ist, der aber die Eigenschaft (t_2) nicht besitzt, w. z. b. w. [39]).

§ 4. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Identität zwischen Häufungsraum und zugeordnetem Häufungsraum.

18. Gegeben sei jetzt irgendein Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$; $\mathfrak{H}_1$ sei der zugeordnete Häufungsraum. $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_1$ haben dieselben Elemente; die Festlegung der Häufungsbeziehungen ist jedoch für beide Räume auf verschiedene Art vorgenommen. Während die Häufungspunkte in $\mathfrak{H}_0$ völlig willkürlich erklärt sind, hängen die Häufungsbeziehungen von $\mathfrak{H}_1$ letzten Endes über die Umgebungen des zwischengeschalteten, dem Raum $\mathfrak{H}_0$ zugeordneten Umgebungsraumes $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ wieder von den Häufungsbeziehungen von $\mathfrak{H}_0$ ab. Es ist demnach, wenn P einen Punkt, $\mathfrak{A}$ eine Menge beider Räume $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_1$ [40]) bezeichnet, auseinander zu halten, ob P „*in* $\mathfrak{H}_0$“ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ oder „*in* $\mathfrak{H}_1$“ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ ist.

Die Räume $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_1$ seien „*identisch*“ genannt, wenn für jede Menge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{H}_0$ jeder Punkt P von $\mathfrak{H}_0$, der in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ ist, auch in $\mathfrak{H}_1$ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ ist, und um-

---

[39]) Wie ohne weiteres ersichtlich ist, besitzt der Raum $\mathfrak{T}_0$ des Beispiels *1* und ebenso der Raum $\mathfrak{T}_0$ des Beispiels *2* auch die Eigenschaft (t_1) nicht. Tatsächlich würden die Beispiele *1* bzw. *2* den gemäß Nr. **16**, 1. Absatz, geforderten Beweis nicht erbringen können, wenn die Räume $\mathfrak{T}_0$ dieser Beispiele die Eigenschaft (t_1) hätten; denn in diesem Falle wäre nach Satz *2* jede $\mathfrak{U}(P | \mathfrak{T}_0)$ auch eine $\mathfrak{U}(P | \mathfrak{T}_1)$, und da voraussetzungsgemäß jede $\mathfrak{U}(P | \mathfrak{T}_1)$ auch eine $\mathfrak{U}(P | \mathfrak{T}_0)$ ist, so wären $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{T}_1$ identische Räume und $\mathfrak{T}_0$ hätte somit gemäß Satz *1* notwendig die Eigenschaft (t_2).

[40]) Entsprechend der unter Anm. [30]) für Umgebungsräume getroffenen Verabredung sei auch hier, da $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_1$ hinsichtlich ihrer Elemente völlig gleich sind, der Kürze halber künftig einfach von Punkten bzw. Mengen „*von* $\mathfrak{H}_0$“ gesprochen.

gekehrt jeder Punkt von $\mathfrak{H}_0$, der in $\mathfrak{H}_1$ einen Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ darstellt, auch in $\mathfrak{H}_0$ einen Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ darstellt.

Die Frage, ob $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_1$ in jedem Falle identisch sind, bzw. unter welchen Voraussetzungen zwischen $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_1$ Identität besteht, wird beantwortet durch den folgenden Satz:

Satz 4. Ist $\mathfrak{H}_0$ irgendein Häufungsraum, $\mathfrak{H}_1$ der zugeordnete Häufungsraum, so ist dann und nur dann $\mathfrak{H}_1$ identisch $\mathfrak{H}_0$, wenn $\mathfrak{H}_0$ die folgende Eigenschaft besitzt:

(h_1). Ist ein Punkt P in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt einer Menge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{H}_0$, so ist P in $\mathfrak{H}_0$ auch Häufungspunkt von jeder Menge $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A} - \{P\}$[41]).

19. Beweis zu Satz *4* (1. Teil). Wir zeigen: Die Bedingung (h_1) ist notwendig für die Identität; d. h. ist $\mathfrak{H}_1$ identisch $\mathfrak{H}_0$, dann hat der Raum $\mathfrak{H}_0$ die Eigenschaft (h_1).

Sicher ist dies dann erwiesen, wenn gezeigt werden kann, daß der Raum $\mathfrak{H}_1$ unabhängig von der Beschaffenheit des Raumes $\mathfrak{H}_0$ stets diese Eigenschaft — ausgesprochen jetzt natürlich für die Häufungsbeziehungen in $\mathfrak{H}_1$ — besitzt. Das ist aber eine unmittelbare Folge der Erklärung der Häufungsbeziehungen in $\mathfrak{H}_1$: Ist nämlich ein Punkt P in $\mathfrak{H}_1$ Häufungspunkt einer Menge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{H}_0$, so liegt — nach Definition des Häufungspunktes in $\mathfrak{H}_1$ — in jeder Umgebung von P mindestens ein Punkt von $\mathfrak{A} - \{P\}$ und damit auch, wenn $\mathfrak{B}$ irgendeine Menge $\supseteq \mathfrak{A} - \{P\}$ bedeutet, mindestens ein Punkt von $\mathfrak{B} - \{P\}$. Laut Definition des Häufungspunktes in $\mathfrak{H}_1$ ist somit P in $\mathfrak{H}_1$ Häufungspunkt von $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{H}_1$ besitzt also stets die Eigenschaft (h_1), w. z. b. w.

20. Beweis zu Satz *4* (2. Teil). Wir zeigen: Daß der Raum $\mathfrak{H}_0$ die Eigenschaft (h_1) besitzt, ist hinreichend für die Identität; d. h. genügen die Häufungsbeziehungen in $\mathfrak{H}_0$ dieser Bedingung, dann ist für jede Menge von $\mathfrak{H}_0$ jeder Punkt von $\mathfrak{H}_0$, der in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt der Menge ist, auch in $\mathfrak{H}_1$ Häufungspunkt der Menge, und umgekehrt.

1. Es sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Menge von $\mathfrak{H}_0$ und P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{H}_0$, der in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ ist. Bezeichnet $\mathfrak{U}$ irgendeine Umgebung von P, so enthält nach Definition der Umgebung die Menge $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}$ den Punkt P nicht und hat insbesondere den Punkt P in $\mathfrak{H}_0$ auch nicht zum Häufungspunkt. Wegen der Gültigkeit von (h_1) in $\mathfrak{H}_0$ ist daher die Menge $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}$ sicher nicht $\supseteq \mathfrak{A} - \{P\}$[42]),

[41]) Die Bedingung stellt eine äußerlich geringfügige Abänderung des in Nr. 7 angegebenen Häufungsaxiomes (*1*) dar; sie fordert jedoch mehr als dieses Axiom.

[42]) Wäre nämlich $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U} \supseteq \mathfrak{A} - \{P\}$, so müßte der Punkt P, der in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ ist, wegen (h_1) in $\mathfrak{H}_0$ auch Häufungspunkt von jeder Menge $\supseteq \mathfrak{A} - \{P\}$, also auch von $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}$ sein.

d. h. $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{A}-\{P\}$ haben mindestens einen gemeinsamen Punkt. Da $\mathfrak{U}$ als Umgebung von P ganz beliebig gewählt war, liegt demnach in *jeder* Umgebung von P mindestens ein Punkt von $\mathfrak{A}-\{P\}$; gemäß Definition der Häufungspunkte in $\mathfrak{H}_1$ ist somit P auch in $\mathfrak{H}_1$ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$, w. z. b. w.

2. $\mathfrak{A}$ sei wieder eine beliebige Menge von $\mathfrak{H}_0$ und P bedeute jetzt einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{H}_0$, der in $\mathfrak{H}_1$ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ ist. Nach Definition des Häufungspunktes in $\mathfrak{H}_1$ gibt es in jeder Umgebung von P mindestens einen Punkt von $\mathfrak{A}-\{P\}$. Da die Menge $\mathfrak{H}_0-(\mathfrak{A}-\{P\})$ sicher keinen Punkt von $\mathfrak{A}-\{P\}$ enthält, ist sie also nicht Umgebung von P. Daher muß laut Erklärung der Umgebungsbeziehungen die Menge $\mathfrak{A}-\{P\}$ den Punkt P entweder enthalten oder in $\mathfrak{H}_0$ zum Häufungspunkt haben. Ersteres ist unmöglich; P ist also in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}-\{P\}$. Wegen (h_1) ist P in $\mathfrak{H}_0$ dann auch Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$, w. z. b. w.

21. Der Beweis unter Nr. **20**, 1 gelingt, wie man bei genauerer Betrachtung sofort feststellt, auch dann, wenn (h_1) ersetzt wird durch die schwächere Forderung:

(h_1'). *Ist ein Punkt P in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt einer Menge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{H}_0$, so ist P in $\mathfrak{H}_0$ auch Häufungspunkt von jeder Menge $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}-\{P\}$, die P nicht enthält.*

Es erweist sich somit bereits diese Bedingung (h_1') als hinreichend dafür, daß für jede Menge von $\mathfrak{H}_0$ jeder Punkt von $\mathfrak{H}_0$, der in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt der Menge ist, auch in $\mathfrak{H}_1$ Häufungspunkt der Menge ist. Wie wir aber sofort sehen werden, ist (h_1') hierfür auch notwendig; d. h. es gilt: ist für jede Menge von $\mathfrak{H}_0$ jeder Punkt von $\mathfrak{H}_0$, der in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt der Menge ist, auch in $\mathfrak{H}_1$ Häufungspunkt der Menge, dann hat der Raum $\mathfrak{H}_0$ die Eigenschaft (h_1').

Zum Beweis werde angenommen, der Raum $\mathfrak{H}_0$ besitze die Eigenschaft (h_1') nicht. Dann gibt es in $\mathfrak{H}_0$ eine Menge $\mathfrak{A}_0$, einen Punkt P_0 und eine den Punkt P_0 nicht enthaltende Menge $\mathfrak{B}_0 \supset \mathfrak{A}_0-\{P_0\}$ derart, daß P_0 in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}_0$, aber in $\mathfrak{H}_0$ nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{B}_0$ ist. Da P_0 auch nicht Punkt von $\mathfrak{B}_0$ ist, so bedeutet — gemäß Definition der Umgebung in $\mathfrak{H}_0$ — die Menge $\mathfrak{H}_0-\mathfrak{B}_0$ eine Umgebung von P_0. Diese Umgebung enthält keinen Punkt von $\mathfrak{B}_0$ und wegen $\mathfrak{B}_0 \supset \mathfrak{A}_0-\{P_0\}$ auch keinen Punkt von $\mathfrak{A}_0-\{P_0\}$. P_0 ist somit in $\mathfrak{H}_1$ — laut Erklärung der Häufungsbeziehungen in $\mathfrak{H}_1$ — nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{A}_0$, im Widerspruch zur Voraussetzung: denn P_0 ist in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}_0$ und daher voraussetzungsgemäß auch in $\mathfrak{H}_1$

Häufungspunkt von $\mathfrak{A}_0$. Der Raum $\mathfrak{H}_0$ besitzt demnach die Eigenschaft (h_1'), w. z. b. w.

Demnach gilt folgender Satz:

Satz 5. Ist $\mathfrak{H}_0$ irgendein Häufungsraum, $\mathfrak{H}_1$ der zugeordnete Häufungsraum, so ist dann und nur dann für jede Menge von $\mathfrak{H}_0$ jeder Punkt von $\mathfrak{H}_0$, der in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt der Menge ist, auch in $\mathfrak{H}_1$ Häufungspunkt der Menge, wenn $\mathfrak{H}_0$ die Eigenschaft (h_1') besitzt.

22. Der Beweis unter Nr. **20**, 2 gelingt offenbar auch dann, wenn man (h_1) ersetzt durch die viel schwächere Forderung:

(h_1''). *Ist ein Punkt P in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt einer Menge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{H}_0$, so ist P in $\mathfrak{H}_0$ auch Häufungspunkt der Menge $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \dotplus \{P\}$* [43]).

Diese schwache Forderung (h_1'') ist mit anderen Worten bereits hinreichend dafür, daß für jede Menge von $\mathfrak{H}_0$ jeder Punkt von $\mathfrak{H}_0$, der in $\mathfrak{H}_1$ Häufungspunkt der Menge ist auch in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt der Menge ist. Notwendig ist (h_1'') hierfür jedoch nicht; der Beweis läßt sich dadurch erbringen, daß ein Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ angegeben wird, für den jeder Punkt, der im zugeordneten Häufungsraum $\mathfrak{H}_1$ Häufungspunkt einer Menge von $\mathfrak{H}_0$ ist, auch in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt dieser Menge ist, der aber die Eigenschaft (h_1'') nicht besitzt. Einen derartigen Häufungsraum gibt das folgende Beispiel:

Beispiel 3. Es bedeute $\mathfrak{M} = \{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ mit $n \geqq 2$ eine endliche Menge von irgendwelchen voneinander verschiedenen Elementen („*Punkten*") P_ν. Wir machen diese Menge zu einem Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$, indem wir auf folgende Art Häufungspunkte — Häufungspunkte „*in* $\mathfrak{H}_0$" — festlegen: P_0 sei in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt von jeder Menge aus $\mathfrak{H}_0$, der $\{P_2, P_3, \ldots, P_n\}$ als Teilmenge angehört, und nur von jeder solchen Menge; P_1 sei in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt von $\{P_2, P_3, \ldots, P_n\}$ und nur von dieser Menge; P_ν $(\nu = 2, 3, \ldots, n)$ sei in $\mathfrak{H}_0$ von keiner Menge aus $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt. $\mathfrak{H}_1$ bedeute den zugeordneten Häufungsraum. Dann liegen folgende Verhältnisse vor:

Die Menge $\{P_\nu\}$ ist für $\nu \neq 0$ Umgebung von P_ν; denn die Komplementärmenge $\mathfrak{H}_0 - \{P_\nu\}$ enthält P_ν nicht und hat auch P_ν in $\mathfrak{H}_0$ nicht zum Häufungspunkt, da für $\nu = 2, 3, \ldots . n$ der Punkt P_ν in $\mathfrak{H}_0$ von keiner Menge Häufungspunkt und für $\nu = 1$ die Menge $\mathfrak{H}_0 - \{P_1\} \dotplus \{P_2, P_3, \ldots, P_n\}$ ist. Hingegen ist offenbar $\{P_0\}$ nicht Umgebung von P_0. Vielmehr ist Umgebung von P_0 jede Menge und nur jede solche Menge, der P_0 und ein Punkt P_ν, welcher $\neq P_0$ und $\neq P_1$ ist, angehört;

[43]) Für den Fall, daß $\mathfrak{A}$ den Punkt P enthält, ist die Forderung (h_1'') natürlich eine Trivialität.

in diesen und nur in diesen Fällen enthält nämlich die Komplementärmenge weder den Punkt P_0 noch die ganze Menge $\{P_2, P_3, \ldots, P_n\}$, hat also P_0 nicht als Punkt und in $\mathfrak{H}_0$ nicht als Häufungspunkt.

Da ganz allgemein ein Punkt P eines Häufungsraumes $\mathfrak{H}$, für den $\{P\}$ Umgebung von P ist, im zugeordneten Häufungsraum niemals Häufungspunkt einer Menge sein kann[44]), so kommt im vorliegenden Falle als Häufungspunkt in $\mathfrak{H}_1$ nur P_0 in Betracht, und zwar ist P_0 in $\mathfrak{H}_1$ Häufungspunkt von jeder und nur jeder solchen Menge aus $\mathfrak{H}_0$, der $\{P_2, P_3, \ldots, P_n\}$ als Teilmenge angehört; es liegt ja, wenn $\mathfrak{A}$ eine derartige Menge bedeutet, in jeder Umgebung von P_0 neben P_0 selbst mindestens ein Punkt P_ν, der sowohl $\neq P_0$ als auch $\neq P_1$ ist, und also mindestens ein Punkt der Menge $\mathfrak{A}-\{P_0\}$, während andererseits zu jeder Menge $\mathfrak{B}$, die von den genannten Mengen $\mathfrak{A}$ verschieden ist, und daher mindestens einen Punkt $P_\nu = P_{\nu_0} \neq P_0$ und $\neq P_1$ nicht enthält, in $\{P_0, P_{\nu_0}\}$ sogleich eine Umgebung von P_0 gefunden ist, in der es keinen Punkt von $\mathfrak{B}-\{P_0\}$ gibt.

Von jeder Menge, der $\{P_2, P_3, \ldots, P_n\}$ als Teilmenge angehört, ist — laut Erklärung der Häufungsbeziehungen in $\mathfrak{H}_0$ — der Punkt P_0 aber auch in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt. Demnach stellt für jede Menge von $\mathfrak{H}_0$ jeder Punkt von $\mathfrak{H}_0$, der in $\mathfrak{H}_1$ Häufungspunkt der Menge ist, auch in $\mathfrak{H}_0$ einen Häufungspunkt der Menge dar. Jedoch besitzt $\mathfrak{H}_0$ die Eigenschaft (h_1'') nicht: Betrachten wir nämlich die Menge $\mathfrak{A} = \{P_2, P_3, \ldots, P_n\}$ und den Punkt P_1; P_1 ist in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$, ist aber in $\mathfrak{H}_0$ nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{A} + \{P_1\} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$.

Es ist somit ein Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ gefunden, in dem jeder Punkt, der in $\mathfrak{H}_1$ Häufungspunkt einer Menge von $\mathfrak{H}_0$ ist, auch in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt dieser Menge ist, der aber die Eigenschaft (h_1'') nicht besitzt, w. z. b. w.[45]).

---

[44]) Denn ist $\mathfrak{A}$ irgendeine Menge von $\mathfrak{H}$, so stellt $\{P\}$ stets eine Umgebung von P dar, in der kein Punkt von $\mathfrak{A}-\{P\}$ liegt. Vgl. auch Anm. [35]) 2.

[45]) Es sei noch festgestellt, daß der Raum $\mathfrak{H}_0$ des Beispiels *3* auch nicht die Eigenschaft (h_1') besitzt: Man betrachte nur die Mengen $\mathfrak{A} = \{P_2, P_3, \ldots, P_n\}$, $\mathfrak{B} = \{P_0, P_2, P_3, \ldots, P_n\}$ und den Punkt P_1; P_1 ist in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ist $\supset \mathfrak{A} - \{P_1\}$ und enthält P_1 nicht, P_1 ist in $\mathfrak{H}_0$ aber nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{B}$.

Tatsächlich würde das Beispiel *3* den geforderten Beweis nicht erbringen, wenn der Raum $\mathfrak{H}_0$ dieses Beispiels die Eigenschaft (h_1') hätte; denn nach Satz *5* wäre dann für jede Menge von $\mathfrak{H}_0$ jeder Punkt von $\mathfrak{H}_0$, der in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt der Menge ist, auch in $\mathfrak{H}_1$ Häufungspunkt dieser Menge, und da voraussetzungsgemäß jeder Punkt von $\mathfrak{H}_0$, der in $\mathfrak{H}_1$ Häufungspunkt einer Menge von $\mathfrak{H}_0$ ist, auch in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt dieser Menge ist, so wären $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_1$ identische Räume und $\mathfrak{H}_0$ hätte somit gemäß Satz *4* notwendig die Eigenschaft (h_1'').

Demnach läßt sich folgender Satz aussprechen:

Satz 6. $\mathfrak{H}_0$ *sei irgendein Häufungsraum,* $\mathfrak{H}_1$ *der zugeordnete Häufungsraum. Damit für jede Menge von* $\mathfrak{H}_0$ *jeder Punkt von* $\mathfrak{H}_0$, *der in* $\mathfrak{H}_1$ *Häufungspunkt der Menge ist, auch in* $\mathfrak{H}_0$ *Häufungspunkt der Menge ist, ist hinreichend, aber nicht notwendig, daß* $\mathfrak{H}_0$ *die Eigenschaft* (h_1'') *besitzt*[46]).

§ 5. Kennzeichnende Eigenschaften des Häufungsraumes, der einem Umgebungsraum und des Umgebungsraumes, der einem Häufungsraum zugeordnet ist.

23. Während in den §§ 3 und 4 von Beziehungen zwischen Umgebungsraum und zugeordnetem Umgebungsraum bzw. Häufungsraum und zugeordnetem Häufungsraum die Rede war, soll nunmehr in eine nähere Untersuchung der Zusammenhänge eingetreten werden, die zwischen Umgebungsraum und zugeordnetem Häufungsraum bzw. zwischen Häufungsraum und zugeordnetem Umgebungsraum bestehen.

Es zeigt sich, daß der einem Umgebungsraum zugeordnete Häufungsraum ebenso wie der einem Häufungsraum zugeordnete Umgebungsraum stets von spezieller Art ist, wie allgemein auch immer der Ausgangsraum sein möge. Genauere Aussagen hierüber geben die folgenden Sätze 7 und 8, von denen Satz 7, 1 und Satz 8, 1 implizit bereits in den Nrn. **19** bzw. **13** bewiesen wurden.

Satz 7. 1. *Der einem Umgebungsraum* $\mathfrak{T}_0$ *zugeordnete Häufungsraum* $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ *besitzt stets die Eigenschaft* (h_1).

2. *Ist umgekehrt* $\mathfrak{H}_0$ *ein Häufungsraum mit der Eigenschaft* (h_1), *so gibt es stets (mindestens) einen Umgebungsraum* $\mathfrak{T}_0$ *derart, daß* $\mathfrak{H}_0$ *identisch ist mit dem dem Raum* $\mathfrak{T}_0$ *zugeordneten Häufungsraum* $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$.

Satz 8. 1. *Der einem Häufungsraum* $\mathfrak{H}_0$ *zugeordnete Umgebungsraum* $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ *besitzt stets die Eigenschaft* (t_1).

[46]) Es sei hier Folgendes bemerkt: Offenbar sind die Eigenschaften (h_1') und (h_1'') zusammen genommen der Eigenschaft (h_1) völlig gleichwertig. Näherliegend als die Aufspaltung von (h_1) in (h_1') und (h_1'') erscheint zunächst allerdings die Aufspaltung von (h_1) in die folgenden beiden Eigenschaften:

1. Ist ein Punkt P eines Häufungsraumes $\mathfrak{H}_0$ in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt einer Menge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{H}_0$, so ist P in $\mathfrak{H}_0$ auch Häufungspunkt von jeder Menge $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ — diese Eigenschaft ist nichts anderes als das Häufungsaxiom $(\mathit{1})$ von Nr. **7** —;

2. ist ein Punkt P in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt einer Menge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{H}_0$, so ist P in $\mathfrak{H}_0$ auch Häufungspunkt der Menge $\mathfrak{A} - \{P\}$.

Diese Aufspaltung von (h_1) würde für den Begriff des Häufungsraumes jedoch nicht die den Überlegungen in § 3 über Umgebungsräume parallel gelagerten Ergebnisse liefern, wie sie durch die Aufspaltung in die Eigenschaften (h_1') und (h_1'') erzielt wurden.

2. *Ist umgekehrt $\mathfrak{T}_0$ ein Umgebungsraum mit der Eigenschaft (t_1), so gibt es stets (mindestens) einen Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ derart, daß $\mathfrak{T}_0$ identisch ist mit dem dem Raum $\mathfrak{H}_0$ zugeordneten Umgebungsraum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$.*

24. Beweis zu Satz 7. Wie bereits gesagt, ist der Nachweis, daß der einem Umgebungsraum zugeordnete Häufungsraum stets die Eigenschaft (h_1) besitzt, implicit schon in Nr. **19** erbracht worden. Es wird dort nämlich für einen gewissen Häufungsraum $\mathfrak{H}_1$ gezeigt, daß er die Eigenschaft (h_1) hat. $\mathfrak{H}_1$ ist dabei ein Häufungsraum, der einem Umgebungsraum zugeordnet ist. Dieser Umgebungsraum ist zwar seinerseits wieder einem Häufungsraum zugeordnet, beim Beweis wird das aber in keiner Weise benützt. Mit anderen Worten: Es gilt, daß *jeder* Häufungsraum, der einem Umgebungsraum zugeordnet ist, die Eigenschaft (h_1) besitzt.

Es sei nun $\mathfrak{H}_0$ ein Häufungsraum mit der Eigenschaft (h_1); $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ sei der zugeordnete Umgebungsraum. Wir behaupten: $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ stellt bereits einen Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ der verlangten Art dar. Wird nämlich der dem Raum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ zugeordnete Häufungsraum $\mathfrak{H}[\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)] = \mathfrak{H}_1$ betrachtet, so ist $\mathfrak{H}_1$, da der Ausgangsraum $\mathfrak{H}_0$ voraussetzungsgemäß die Eigenschaft (h_1) besitzt, nach Satz 4 mit $\mathfrak{H}_0$ identisch, w. z. b. w.

25. Beweis zu Satz 8. Der Nachweis, daß der einem Häufungsraum zugeordnete Umgebungsraum stets die Eigenschaft (t_1) besitzt, ist, wie schon erwähnt, implicit bereits in Nr. **13** erbracht worden. Es wird dort nämlich für einen gewissen Umgebungsraum $\mathfrak{T}_1$ gezeigt, daß er die Eigenschaften (t_1) und (t_2) besitzt. $\mathfrak{T}_1$ ist dabei ein Umgebungsraum, der einem Häufungsraum zugeordnet ist. Dieser Häufungsraum ist nun seinerseits wieder einem Umgebungsraum zugeordnet, was jedoch beim Beweis, daß $\mathfrak{T}_1$ die Eigenschaft (t_1) besitzt, in gar keiner Weise Verwendung findet [47]). Mit anderen Worten: Es gilt für *jeden* Umgebungsraum, der einem Häufungsraum zugeordnet ist, daß er die Eigenschaft (t_1) besitzt.

Es sei nun $\mathfrak{T}_0$ ein Umgebungsraum mit der Eigenschaft (t_1). Wir stellen zunächst fest: Bezeichnet $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ den dem Raum $\mathfrak{T}_0$ zugeordneten Häufungsraum, so ist $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ ein Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ der verlangten Art dann und nur dann, wenn $\mathfrak{T}_0$ neben der Eigenschaft (t_1) auch die

[47]) Hingegen findet diese Tatsache sehr wohl Verwendung beim Beweis, daß $\mathfrak{T}_1$ die Eigenschaft (t_2) besitzt. Tatsächlich hat ein Umgebungsraum, der einem Häufungsraum zugeordnet ist, die Eigenschaft (t_2) nicht in jedem Falle; vielmehr gilt Satz 9 (vgl. Nr. **27**).

Eigenschaft (t_2) besitzt; dann und nur dann ist nämlich nach Satz *1* der dem Raum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ zugeordnete Umgebungsraum mit $\mathfrak{T}_0$ identisch.

Es läßt sich jedoch unabhängig davon, ob der Raum $\mathfrak{T}_0$ die Eigenschaft (t_2) besitzt oder nicht, stets ein Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ angeben derart, daß $\mathfrak{T}_0$ identisch ist mit dem dem Raum $\mathfrak{H}_0$ zugeordneten Umgebungsraum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$, und zwar ergibt sich $\mathfrak{H}_0$ aus $\mathfrak{T}_0$ durch die folgende Definition:

Ist P irgendein Punkt von $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{A}$ irgendeine Menge von $\mathfrak{T}_0$, so heiße P Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{A}$ nicht Umgebung von P ist [48]).

Zum Beweis haben wir zu zeigen, daß $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0) \equiv \mathfrak{T}_0$ ist, d. h. daß für jeden Punkt P von $\mathfrak{T}_0$ jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ auch eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0))$ und jede $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0))$ auch eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$ ist.

1. Es sei P irgendein Punkt von $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{B}$ eine beliebige $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$. Da $\mathfrak{T}_0$ voraussetzungsgemäß die Eigenschaft (t_1) besitzt, ist P Punkt von $\mathfrak{B}$, also nicht Punkt von $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{B}$. P ist aber auch nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{B}$ im Sinne der obigen Definition; denn $\mathfrak{B}$ ist ja eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$. P ist also weder Punkt noch Häufungspunkt von $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{B}$; laut Definition der Umgebungen im Raum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ ist $\mathfrak{B}$ somit eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0))$, w. z. b. w.

2. P sei wieder ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{B}$ sei jetzt eine beliebige $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0))$. Laut Definition der Umgebungen in $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ ist daher P weder Punkt noch Häufungspunkt von $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{B}$. Laut obiger Definition des Häufungspunktes ist demnach $\mathfrak{B}$ eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}_0)$, w. z. b. w.

26. Ist $\mathfrak{T}_0$ ein Umgebungsraum, der neben der Eigenschaft (t_1) auch die Eigenschaft (t_2) besitzt, so gibt es nach den Ausführungen der vorhergehenden Nummer *zwei* Möglichkeiten der Konstruktion eines Häufungsraumes von der Art, daß $\mathfrak{T}_0$ den ihm zugeordneten Umgebungsraum darstellt: der zu $\mathfrak{T}_0$ zugeordnete Häufungsraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ ist der eine, der durch die vorige Häufungspunkterklärung (Nr. **25**) aus $\mathfrak{T}_0$ herleitbare Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ der andere Häufungsraum, der das Verlangte leistet.

Es fragt sich, ob $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0) \equiv \mathfrak{H}_0$ ist. Wir zeigen an einem Beispiel, daß diese Identität nicht notwendig zu bestehen braucht.

Beispiel 4. Es bedeute $\mathfrak{M} = \{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ mit $n \geqq 0$ eine endliche Menge von irgendwelchen Elementen („*Punkten*") P_ν. Wir setzen fest: Umgebung von P_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$ sei jede Menge aus $\mathfrak{M}$, die P_ν enthält.

[48]) Diese Definition des Häufungspunktes einer Menge $\mathfrak{A}$ in einem Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ wird, wie bereits in Nr. **9** erwähnt, bei W. O. Gordon, l. c. [1]) benutzt.

Mit diesen Festsetzungen ist $\mathfrak{M}$ ein Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$, der ersichtlich sowohl die Eigenschaft (t_1) als auch die Eigenschaft $(t_2$ besitzt.

Der dem Raum $\mathfrak{T}_0$ zugeordnete Häufungsraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ besteht aus den Punkten von $\mathfrak{T}_0$ und den folgenden Häufungsbeziehungen: P_ν ist für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$ von keiner Menge aus $\mathfrak{T}_0$ Häufungspunkt; denn $\{P_\nu\}$ ist für jedes ν Umgebung von P_ν und ein Punkt P eines Umgebungsraumes $\mathfrak{T}$, der die Menge $\{P\}$ als Umgebung hat, ist von keiner Menge aus $\mathfrak{T}$ Häufungspunkt [49]).

Hingegen besteht der aus dem Raum $\mathfrak{T}_0$ durch die in Nr. 25 angegebene Häufungspunkterklärung herleitbare Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ aus sämtlichen Punkten von $\mathfrak{T}_0$ und folgenden Häufungsbeziehungen: P_ν ist für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$ Häufungspunkt von jeder Menge und nur jeder solchen Menge aus $\mathfrak{T}_0$, die P_ν enthält; denn die Komplementärmenge jeder solchen, aber auch nur jeder solchen Menge ist nicht Umgebung von P_ν.

Es ist somit ein Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ mit den Eigenschaften $(t_1), (t_2)$ gefunden, für den $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0) \neq \mathfrak{H}_0$ ist, w. z. b. w.

27. Nach Satz *8*, 1 hat der einem Häufungsraum zugeordnete Umgebungsraum stets die Eigenschaft (t_1). Über die Gültigkeit der Eigenschaft (t_2), die in § 3 eine wesentliche Rolle spielte, wurde in Satz *8*, 1 keine Aussage gemacht. Tatsächlich besitzt der einem Häufungsraum zugeordnete Umgebungsraum die Eigenschaft (t_2) nicht in jedem Falle. Vielmehr gilt der folgende Satz:

Satz 9. Der einem Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ zugeordnete Umgebungsraum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ besitzt die Eigenschaft (t_2) dann und nur dann, wenn der Raum $\mathfrak{H}_0$ der folgenden Bedingung genügt:

(h_1'''). Ist ein Punkt P in $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt einer Menge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{H}_0$, die P nicht enthält, so ist P in $\mathfrak{H}_0$ auch Häufungspunkt von jeder Menge $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$, die P nicht enthält [50]).

Beweis zu Satz *9*. Zunächst ist leicht einzusehen, daß (h_1''') hinreichend ist; d. h. ist $\mathfrak{H}_0$ irgendein Häufungsraum mit der Eigenschaft (h_1'''), so besitzt der zugeordnete Umgebungsraum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ die Eigenschaft (t_2).

Es sei P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{A}$ eine beliebige $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0))$ und $\mathfrak{B}$ eine beliebige, $\mathfrak{A}$ umfassende Menge von $\mathfrak{H}_0$. Nach Definition der Umgebung in $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ enthält $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{A}$ den Punkt P nicht und hat P nicht zum Häufungspunkt. Wegen $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}_0 - \mathfrak{A}$ gehört P auch

[49]) Vgl. Anm. [35]) 2.

[50]) (h_1''') stellt offenbar eine Abschwächung der Bedingung (h_1), ja sogar eine Abschwächung der Bedingung (h_1') dar.

nicht zu $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{B}$. P ist aber auch nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{B}$; denn sonst müßte wegen (h_1'''), da einerseits die Menge $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{B}$ den Punkt P nicht enthält und andererseits die Menge $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{A}$ die Menge $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{B}$ umfaßt und P nicht enthält, der Punkt P Häufungspunkt von $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{A}$ sein, $\mathfrak{A}$ wäre also keine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0))$, — entgegen der Voraussetzung. Somit ist $\mathfrak{B}$ eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0))$, $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ besitzt also die Eigenschaft (t_2), w. z. b. w.

(h_1''') ist aber auch notwendig; d. h. ist $\mathfrak{H}_0$ irgendein Häufungsraum und besitzt der zugeordnete Umgebungsraum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ die Eigenschaft (t_2), dann muß in $\mathfrak{H}_0$ die Bedingung (h_1''') erfüllt sein. Wir müssen also zeigen: Ist $\mathfrak{A}$ eine beliebige Menge von $\mathfrak{H}_0$, P ein beliebiger Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$, der nicht zu $\mathfrak{A}$ gehört, $\mathfrak{B}$ eine beliebige Menge von $\mathfrak{H}_0$, die $\mathfrak{A}$ umfaßt und P nicht enthält, so ist unter Voraussetzung von (t_2) der Punkt P auch Häufungspunkt von $\mathfrak{B}$.

Angenommen, P sei nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{B}$. Da P auch nicht Punkt von $\mathfrak{B}$ ist, so bedeutet — gemäß Definition der Umgebung in $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ — die Menge $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{B}$ eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0))$. Wegen (t_2) und $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{H}_0 - \mathfrak{B}$ ist somit auch die Menge $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{A}$ eine $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0))$; laut Umgebungserklärung enthält dann ihre Komplementärmenge $\mathfrak{A}$ den Punkt P nicht, was mit der Voraussetzung in Einklang steht, und hat außerdem P nicht zum Häufungspunkt, was der Voraussetzung widerspricht. P muß demnach Häufungspunkt von $\mathfrak{B}$ sein, w. z. b. w.

§ 6. Folgen von zugeordneten Umgebungs- und Häufungsräumen.

28. $\mathfrak{T}_0$ sei irgendein Umgebungsraum, $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ der zugeordnete Häufungsraum. Aus Zweckmäßigkeitsgründen sei hier $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ auch mit $\mathfrak{H}_0$ bezeichnet. $\mathfrak{T}[\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)] = \mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0) = \mathfrak{T}_1$ sei der dem Raum $\mathfrak{H}_0$ zugeordnete Umgebungsraum. Setzt man die Zuordnung fort, betrachtet man also zum Umgebungsraum $\mathfrak{T}_1$ den zugeordneten Häufungsraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_1) = \mathfrak{H}_1$, zu diesem Häufungsraum wieder den zugeordneten Umgebungsraum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_1) = \mathfrak{T}_2$ usw., so erhält man eine unendliche Folge von Umgebungs- und Häufungsräumen:

$$\mathfrak{T}_0, \mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0);\ \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0),\ \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}(\mathfrak{T}_1); \ldots$$
$$\ldots;\ \mathfrak{T}_\nu = \mathfrak{T}(\mathfrak{H}_{\nu-1}), \mathfrak{H}_\nu = \mathfrak{H}(\mathfrak{T}_\nu); \ldots$$

Die Folge $\mathfrak{T}_\nu, \mathfrak{H}_\nu$ erwächst aus dem Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ als Ausgangsraum derart, daß jeder Raum der Folge dem in der Folge vorhergehenden zugeordnet ist.

Entsprechend kann man von einem Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ ausgehen und die aus diesem entspringende Folge $\mathfrak{H}_\nu, \mathfrak{T}_\nu$ von zugeordneten Räumen betrachten:

$$\mathfrak{H}_0, \mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0);\ \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0), \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}(\mathfrak{H}_1);\ \ldots$$
$$\ldots;\ \mathfrak{H}_\nu = \mathfrak{H}(\mathfrak{T}_{\nu-1}), \mathfrak{T}_\nu = \mathfrak{T}(\mathfrak{H}_\nu);\ \ldots\ ^{51})$$

Aus unseren vorhergehenden Überlegungen werden wir leicht folgern können, daß die beiden Folgen nicht aus unendlich vielen *verschiedenen* Gliedern bestehen, sondern daß, wie allgemein der Ausgangsraum auch immer sein möge, von einem gewissen Glied an immer wieder der nämliche Umgebungsraum und Häufungsraum im Wechsel auftreten. Im einzelnen gelten folgende Sätze:

Satz 10. Für die aus einem Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ erwachsende Folge $\mathfrak{T}_\nu, \mathfrak{H}_\nu$ von zugeordneten Umgebungs- und Häufungsräumen bestehen stets die Beziehungen:

$$\begin{cases} \mathfrak{T}_\nu \equiv \mathfrak{T}_1 & \text{für jedes } \nu \geqq 1, \\ \mathfrak{H}_\nu \equiv \mathfrak{H}_0 & \text{für jedes } \nu \geqq 0. \end{cases}$$

Die Folge sieht demnach folgendermaßen aus:

$$\mathfrak{T}_0, \mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0);\ \mathfrak{T}[\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)], \mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0);\ \mathfrak{T}[\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)], \mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0);\ \ldots$$

Dabei sind die Räume $\mathfrak{T}[\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)]$ und $\mathfrak{T}_0$ dann und nur dann identisch, wenn $\mathfrak{T}_0$ die Eigenschaften (t_1) und (t_2) besitzt.

Satz 11. Für die aus einem Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ erwachsende Folge $\mathfrak{H}_\nu, \mathfrak{T}_\nu$ von zugeordneten Umgebungs- und Häufungsräumen bestehen stets die Beziehungen:

$$\begin{cases} \mathfrak{H}_\nu \equiv \mathfrak{H}_1 & \text{für jedes } \nu \geqq 1, \\ \mathfrak{T}_\nu \equiv \mathfrak{T}_1 & \text{für jedes } \nu \geqq 1. \end{cases}$$

Die Folge sieht demnach folgendermaßen aus:

$$\mathfrak{H}_0, \mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0);\ \mathfrak{H}[\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)], \mathfrak{T}\{\mathfrak{H}[\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)]\};\ \mathfrak{H}[\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)], \mathfrak{T}\{\mathfrak{H}[\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)]\};\ \ldots$$

Dabei gilt: Die Räume $\mathfrak{T}\{\mathfrak{H}[\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)]\}$ und $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ sind dann und nur dann identisch, wenn $\mathfrak{H}_0$ die Eigenschaft (h_1'''), die Räume $\mathfrak{H}[\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)]$ und $\mathfrak{H}_0$ sind dann und nur dann identisch, wenn $\mathfrak{H}_0$ die Eigenschaft (h_1) besitzt.

29. Beweis zu Satz *10*. Wir zeigen zunächst: Es ist $\mathfrak{H}_\nu \equiv \mathfrak{H}_0$ für jedes $\nu \geqq 0$. Der Beweis gelingt durch vollständige Induktion: Die Beziehung $\mathfrak{H}_\nu \equiv \mathfrak{H}_0$ gilt ja sicher für $\nu = 0$; wir nehmen an, sie gelte auch für $\nu = n$ $(n > 0)$ und zeigen, daß sie dann auch für $\nu = n+1$ besteht.

---

[51]) Man beachte, daß hier $\mathfrak{T}_\nu$ auf $\mathfrak{H}_\nu$, bei der ersteren Folge aber $\mathfrak{H}_\nu$ auf $\mathfrak{T}_\nu$ folgt!

Der Raum $\mathfrak{H}_{n+1}$ ist dem Häufungsraum $\mathfrak{H}_n$ zugeordnet. $\mathfrak{H}_n$ ist seinerseits einem Umgebungsraum (nämlich dem Umgebungsraum $\mathfrak{T}_n$) zugeordnet und hat demnach gemäß Satz 7, 1 die Eigenschaft (h_1). Nach Satz *4* ist daher der Raum $\mathfrak{H}_{n+1}$ mit $\mathfrak{H}_n$ identisch, und da $\mathfrak{H}_n \equiv \mathfrak{H}_0$ ist, gilt somit auch $\mathfrak{H}_{n+1} \equiv \mathfrak{H}_0$.

Demnach gilt für jedes $\nu \geqq 0$ die Beziehung $\mathfrak{H}_\nu \equiv \mathfrak{H}_0$. Dann ist aber auch der dem Raum $\mathfrak{H}_\nu$ zugeordnete Umgebungsraum $\mathfrak{T}_{\nu+1}$ identisch mit dem dem Raum $\mathfrak{H}_0$ zugeordneten Umgebungsraum $\mathfrak{T}_1$. Es ist also $\mathfrak{T}_{\nu+1} \equiv \mathfrak{T}_1$ für jedes $\nu \geqq 0$ oder, was dasselbe ist, es gilt $\mathfrak{T}_\nu \equiv \mathfrak{T}_1$ für jedes $\nu \geqq 1$.

Die Folge sieht demnach folgendermaßen aus:

$$\mathfrak{T}_0, \mathfrak{H}_0;\ \mathfrak{T}_1, \mathfrak{H}_0;\ \mathfrak{T}_1, \mathfrak{H}_0;\ \ldots$$

Nach Satz *1* ist dabei auch noch $\mathfrak{T}_1 \equiv \mathfrak{T}_0$ dann, aber auch nur dann, wenn $\mathfrak{T}_0$ die Eigenschaften (t_1), (t_2) besitzt, womit alles bewiesen ist.

Beweis zu Satz *11*. Wir zeigen zunächst, daß $\mathfrak{H}_\nu \equiv \mathfrak{H}_1$ ist für jedes $\nu \geqq 1$. Der Beweis gelingt wieder durch vollständige Induktion: Die Beziehung $\mathfrak{H}_\nu \equiv \mathfrak{H}_1$ gilt ja sicher für $\nu = 1$; wir nehmen an, sie gelte auch für $\nu = n$ $(n > 1)$ und zeigen, daß sie dann auch für $\nu = n+1$ besteht.

Der Raum $\mathfrak{H}_{n+1}$ ist dem Häufungsraum $\mathfrak{H}_n$ zugeordnet. $\mathfrak{H}_n$ ist seinerseits einem Umgebungsraum (nämlich dem Umgebungsraum $\mathfrak{T}_{n-1}$) zugeordnet und hat demnach gemäß Satz 7, 1 die Eigenschaft (h_1). Nach Satz *4* ist daher der Raum $\mathfrak{H}_{n+1}$ mit $\mathfrak{H}_n$ identisch, und da $\mathfrak{H}_n \equiv \mathfrak{H}_1$ ist, gilt somit auch $\mathfrak{H}_{n+1} \equiv \mathfrak{H}_1$.

Demnach gilt für jedes $\nu \geqq 1$ die Beziehung $\mathfrak{H}_\nu \equiv \mathfrak{H}_1$. Damit ist aber auch der dem Raum $\mathfrak{H}_\nu$ zugeordnete Umgebungsraum $\mathfrak{T}_\nu$ identisch mit dem dem Raum $\mathfrak{H}_1$ zugeordneten Umgebungsraum $\mathfrak{T}_1$. Es gilt also $\mathfrak{T}_\nu \equiv \mathfrak{T}_1$ für jedes $\nu \geqq 1$. Die Folge sieht demnach so aus:

$$\mathfrak{H}_0, \mathfrak{T}_0;\ \mathfrak{H}_1, \mathfrak{T}_1;\ \mathfrak{H}_1, \mathfrak{T}_1;\ \ldots$$

Dabei sind nach Satz *1* die Räume $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_0$ dann und nur dann identisch, wenn $\mathfrak{T}_0$ die Eigenschaften (t_1) und (t_2) besitzt, was gemäß Satz 8, 1 in Verbindung mit Satz *9* wiederum dann und nur dann der Fall ist, wenn $\mathfrak{H}_0$ die Eigenschaft (h_1''') hat. Die Räume $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_0$ hingegen sind nach Satz *4* dann und nur dann identisch, wenn $\mathfrak{H}_0$ die Eigenschaft (h_1) hat. Damit ist Satz *11* in allen seinen Teilen bewiesen.

§ 7. Umgebungsraum und äquivalenter Häufungsraum, Häufungsraum und äquivalenter Umgebungsraum. Äquivalente Systeme von Umgebungs- und Häufungsaxiomen.

30. Den weiteren Ausführungen sei folgende Definition zugrundegelegt:

Definition: Ein Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ und ein Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ seien „äquivalent" genannt, wenn $\mathfrak{T}_0$ gleich ist dem dem Raum $\mathfrak{H}_0$ zugeordneten Umgebungsraum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ und $\mathfrak{H}_0$ gleich ist dem dem Raum $\mathfrak{T}_0$ zugeordneten Häufungsraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$.

Wir fragen uns, ob es in jedem Falle möglich ist bzw. unter welchen Voraussetzungen es möglich ist, zu einem vorgelegten Umgebungsraum einen äquivalenten Häufungsraum und zu einem vorgelegten Häufungsraum einen äquivalenten Umgebungsraum anzugeben.

Es ist sofort klar: Ist $\mathfrak{T}_0$ irgendein Umgebungsraum, so kann nach Definition der Äquivalenz als zu $\mathfrak{T}_0$ äquivalenter Häufungsraum einzig und allein der zu $\mathfrak{T}_0$ zugeordnete Häufungsraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ in Betracht kommen. Die Frage, ob es zu $\mathfrak{T}_0$ einen äquivalenten Häufungsraum gibt, ist daher identisch mit der Frage, ob der Raum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ zu $\mathfrak{T}_0$ äquivalent ist, d. h. nach Definition der Äquivalenz, ob $\mathfrak{T}_0$ gleich ist dem dem Raum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ zugeordneten Umgebungsraum $\mathfrak{T}[\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)] = \mathfrak{T}_1$.

Nach Satz *1* ist aber der Raum $\mathfrak{T}_1$ dann und nur dann mit $\mathfrak{T}_0$ identisch, wenn $\mathfrak{T}_0$ die Eigenschaften $(t_1), (t_2)$ besitzt. Beachtet man noch, daß nach Satz 7, 1 der einem Umgebungsraum zugeordnete Häufungsraum stets die Eigenschaft (h_1) hat, so läßt sich der folgende Satz aussprechen:

Satz 12. Zu einem Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ gibt es dann und nur dann einen äquivalenten Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$, wenn $\mathfrak{T}_0$ die Eigenschaften $(t_1), (t_2)$ besitzt. $\mathfrak{H}_0$ ist eindeutig bestimmt, und zwar ist $\mathfrak{H}_0$ gleich dem Raum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ und hat stets die Eigenschaft (h_1).

Für einen Häufungsraum als Ausgangsraum gilt entsprechend der folgende Satz:

Satz 13. Zu einem Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ gibt es dann und nur dann einen äquivalenten Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$, wenn $\mathfrak{H}_0$ die Eigenschaft (h_1) besitzt. $\mathfrak{T}_0$ ist eindeutig bestimmt, und zwar ist $\mathfrak{T}_0$ gleich dem Raum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ und hat stets die Eigenschaften $(t_1), (t_2)$.

Der Beweis von Satz *13* kann hier übergangen werden; er läßt sich genau analog dem von Satz *12* führen, indem man sich auf den Satz *4*

(statt Satz *1*) und den Satz *8*, 1 in Verbindung mit Satz *9* (statt Satz *7*, 1) stützt.

31. Nach Satz *12* gibt es zu jedem Umgebungsraum, der die Eigenschaften (t_1), (t_2) besitzt, stets einen äquivalenten Häufungsraum; dieser ist eindeutig bestimmt und hat die Eigenschaft (h_1). Umgekehrt gibt es gemäß Satz *13* zu jedem Häufungsraum mit der Eigenschaft (h_1) stets einen äquivalenten Umgebungsraum; dieser ist ebenfalls eindeutig bestimmt und besitzt die Eigenschaften (t_1), (t_2). Zu einem Umgebungsraum, der die Eigenschaften (t_1), (t_2) nicht beide besitzt, gibt es nach Satz *12* keinen äquivalenten Häufungsraum; desgleichen gibt es nach Satz *13* zu einem Häufungsraum, der die Eigenschaft (h_1) nicht besitzt, keinen äquivalenten Umgebungsraum.

Hieraus folgt:

Faßt man den Begriff des Umgebungsraumes und den Begriff des Häufungsraumes enger als es in dieser Arbeit geschieht, und zwar dadurch, daß man zum Begriff Umgebungsraum die Forderungen (t_1), (t_2), zum Begriff Häufungsraum die Forderung (h_1) hinzunimmt, so sind die auf diese Art definierten Begriffe Umgebungsraum und Häufungsraum *„äquivalent“* in dem Sinne, daß zu jedem Raum der einen Gattung ein äquivalenter Raum angebbar ist, der der anderen Gattung angehört; die Begriffe Umgebungsraum und Häufungsraum der in dieser Arbeit zugrundegelegten allgemeinen Fassung aber sind im genannten Sinne *nicht* äquivalent.

Man kann natürlich den Begriff Umgebungsraum außer durch die Forderungen (t_1), (t_2) auch durch irgendwelche andere Forderungen (t'), (t''), (t'''), . . . , $(t^{(k)})$ (*„Umgebungsaxiome“*) und den Begriff des Häufungsraumes außer durch die Bedingung (h_1) auch durch irgendwelche andere Bedingungen (h'), (h''), (h'''), . . . , $(h^{(l)})$ (*„Häufungsaxiome“*) einengen und sich fragen, ob zwischen den auf diese Art gewonnenen Begriffen Umgebungsraum und Häufungsraum Äquivalenz besteht, oder mit anderen Worten, ob das System (t'), (t''), (t'''), . . . , $(t^{(k)})$ von Umgebungsaxiomen und das System (h'), (h''), (h'''), . . . , $(h^{(l)})$ von Häufungsaxiomen zwei äquivalente Axiomsysteme darstellen.

Auf Grund der vorhergehenden Erörterungen läßt sich sofort aussagen, daß ein System von Umgebungsaxiomen und ein System von Häufungsaxiomen jedenfalls nur dann äquivalent sein können, wenn das erstere System die Axiome (t_1), (t_2), das letztere System das Axiom (h_1) explicit oder implicit enthält. Diese für die Äquivalenz zweier derartiger Axiomensysteme notwendigen Bedingungen sind aber

keineswegs hinreichend; es lassen sich nämlich mühelos Systeme von Umgebungs- und Häufungsaxiomen angeben, die diesen Bedingungen genügen und *nicht* äquivalent sind: so stellen, um nur einige Beispiele zu nennen — die nähere Erörterung derselben wird in Nr. **32** erfolgen —, die Systeme $(t_1), (t_2), (\bar{A}a)$ und (h_1); $(t_1), (t_2)$ und $(h_1), (2)$; $(t_1), (t_2), (\bar{A}a)$ und $(h_1), (2)$ sicher je zwei nicht-äquivalente Systeme dar [52]). Andererseits gibt es sicher Systeme von Umgebungs- und Häufungsaxiomen, die äquivalent sind: das aus den Axiomen $(t_1), (t_2)$ bestehende System von Umgebungsaxiomen und das aus dem Axiom (h_1) bestehende System von Häufungsaxiomen sind ja bereits als äquivalent erkannt; diese beiden Systeme sind überdies dadurch ausgezeichnet, daß sie unter allen möglichen äquivalenten Systemen offenbar gerade diejenigen darstellen, die den geringstmöglichen Umfang an Forderungen aufweisen. Im übrigen findet man leicht weitere Beispiele äquivalenter Systeme: Wie in Nr. **33** näher dargelegt werden wird, sind $(t_1), (t_2), (Bb)$ und $(h_1), (2)$; $(t_1), (t_2), (\bar{A}a), (Bb), (D_0)$ und $(1), (2), (3)$; $(t_1), (t_2), (\bar{A}a), (\bar{B}b), (C), (D_0)$ und $(1), (2), (3), (4)$ solche äquivalente Systeme von Umgebungs- und Häufungsaxiomen [53]); die eben genannten Umgebungssysteme lassen sich dabei, da ja $(t_1) = (\bar{A}b)$ und $(t_2) = (Ba)$ ist [54]), auch in folgender Form schreiben: $(Ab), (B)$ bzw. $(\bar{A}), (\bar{B}), (D_0)$ bzw. $(A), (B), (C), (D_0)$.

32. Wir wollen jetzt zeigen, daß die Axiomensysteme $(t_1), (t_2), (\bar{A}a)$ und (h_1) bzw. $(t_1), (t_2)$ und $(h_1), (2)$ bzw. $(t_1), (t_2), (\bar{A}a)$ und $(h_1), (2)$ nicht äquivalent sind. Der Nachweis der Nicht-Äquivalenz der Systempaare $(t_1), (t_2), (Aa)$ und (h_1) bzw. $(t_1), (t_2)$ und $(h_1), (2)$ erledigt sich sofort mit der Bemerkung, daß das Axiom $(\bar{A}a)$ sicherlich nicht aus den Axiomen $(t_1), (t_2)$, das Axiom (2) sicherlich nicht aus dem Axiom (h_1) folgt und daß $(t_1), (t_2)$ und (h_1) äquivalente Systeme sind. Der Nachweis der Nicht-Äquivalenz der Systeme $(t_1), (t_2), (Aa)$ und $(h_1), (2)$ aber ist sicher dann erbracht, wenn es gelingt, einen Umgebungsraum auf-

[52]) Bezüglich des Wortlauts der Axiome $(\bar{A}a)$ und (2) vgl. Nr. **7**. Weitere nicht-äquivalente Systeme siehe unter Nr. **32**, letzter Absatz.

[53]) Bezüglich des Wortlauts dieser Axiome vgl. Nr. **7**. Daß die erwähnten Systeme $(1), (2), (3)$ bzw. $(1), (2), (3), (4)$ die für die Äquivalenz notwendige Forderung (h_1) enthalten, ist klar, da sich (h_1) zerlegen läßt (vgl. auch Anm. [46])) in das Axiom (1) und die weitere Forderung: Ist in einem Häufungsraum $\mathfrak{H}_0$ ein Punkt P von $\mathfrak{H}_0$ Häufungspunkt einer Menge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{H}_0$, so ist P in $\mathfrak{H}_0$ auch Häufungspunkt von $\mathfrak{A} - \{P\}$ — eine Forderung, die aus der Gültigkeit der Axiome (2) und (3) ohne weiteres folgt.

[54]) Vgl. auch die Anm. [33]).

zufinden, der die Eigenschaften $(t_1), (t_2), (\bar{A}a)$ hat, für den jedoch der zugeordnete Häufungsraum die Eigenschaft (2) nicht besitzt[55]). Einen derartigen Umgebungsraum liefert das folgende Beispiel:

Beispiel 5. Es bedeute $\mathfrak{M} = \{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ mit $n \geqq 2$ eine endliche Menge von irgendwelchen voneinander verschiedenen Elementen („*Punkten*") P_ν. Wir setzen fest: Umgebung von P_0 sei die Menge $\mathfrak{M}$ und jede Menge $\mathfrak{M} - \{P_\nu\}$ mit $\nu \neq 0$. Umgebung von P_ν sei für $\nu \neq 0$ jede Menge aus $\mathfrak{M}$, die P_ν enthält.

Mit diesen Festsetzungen ist $\mathfrak{M}$ ein Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$, der die Eigenschaften $(t_1), (t_2), (\bar{A}a)$ offenbar besitzt.

Über den dem Raum $\mathfrak{T}_0$ zugeordneten Häufungsraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ läßt sich sofort aussagen, daß als Häufungspunkt irgendeiner Menge von $\mathfrak{T}_0$ nur P_0 in Frage kommt[56]) und daß P_0 offenbar Häufungspunkt ist von jeder und nur jeder solchen Menge aus $\mathfrak{T}_0$, die mindestens zwei von P_0 verschiedene Punkte von $\mathfrak{T}_0$ enthält.

Dieser Raum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ besitzt nicht die Eigenschaft (2): Betrachten wir nämlich die Menge $\{P_0, P_1, P_2\}$ und zerlegen wir sie in die Teilmengen: $\{P_0, P_1, P_2\} = \{P_0, P_1\} + \{P_2\}$; P_0 ist Häufungspunkt von $\{P_0, P_1, P_2\}$, nicht aber ist P_0 Häufungspunkt von $\{P_0, P_1\}$ oder $\{P_2\}$.

Somit ist ein Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ gefunden, der die Eigenschaften $(t_1), (t_2), (Aa)$ besitzt, während der zugeordnete Häufungsraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ die Eigenschaft (2) nicht aufweist. Die Axiomensysteme $(t_1), (t_2), (\bar{A}a)$ und $(h_1), (2)$ sind daher sicher nicht äquivalent, w. z. b. w.

Im übrigen besitzt der Raum $\mathfrak{T}_0$ des Beispiels 5, wie man leicht nachprüft, neben den Eigenschaften $(t_1), (t_2), (\bar{A}a)$ auch noch die Eigenschaften $(\bar{C}), (\bar{D}_0)$ und $(\bar{D})$, der zugeordnete Raum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ neben der Eigenschaft (h_1) auch noch die Eigenschaften (3) und (4). Es läßt sich daher sofort eine ganze Reihe weiterer Paare von Axiomensystemen angeben, die die für die Äquivalenz notwendigen Bedingungen $(t_1), (t_2)$ bzw. (h_1) enthalten und nicht äquivalent sind: so stellen z. B. $(t_1), (t_2), (\bar{A}a)$ und $(h_1), (2), (3)$ oder $(t_1), (t_2), (\bar{C}), (D_0)$ und $(h_1), (2), (4)$ oder $(t_1), (t_2), (Aa), (\bar{C})$ und $(h_1), (2)$ offenbar solche nicht-äquivalente Axiomensysteme dar.

33. Wir wollen nunmehr zeigen, daß, wie in Nr. **31** behauptet wurde, die Axiomensysteme $(\bar{A}b), (\bar{B})$ und $(h_1), (2)$; $(\bar{A}), (\bar{B}), (\bar{D}_0)$ und $(1), (2), (3)$; $(\bar{A}), (\bar{B}), (\bar{C}), (D_0)$ und $(1), (2), (3), (4)$ äquivalent sind.

---

[55]) Die Eigenschaft (h_1) besitzt der einem Umgebungsraum zugeordnete Häufungsraum nach Satz 7, 1 natürlich in jedem Falle.

[56]) Weil für jeden Punkt $P_\nu \neq P_0$ die Menge $\{P_\nu\}$ eine Umgebung von P_ν darstellt. Vgl. Anm. [35]) 2.

Da diese Systeme die Eigenschaften (t_1) $[=(Ab)]$, (t_2) $[=(\bar{B}a)]$ bzw. (h_1) sicher enthalten [57]), so gibt es jedenfalls zu jedem Raum eines jeden dieser Systeme gemäß Satz *12* bzw. Satz *13* einen äquivalenten Raum und dieser ist gleich dem dem Ausgangsraum zugeordneten Raum. Zum Nachweis der Äquivalenz der genannten Systempaare muß daher gemäß Definition der Äquivalenz nur noch gezeigt werden, daß für jedes Systempaar zu jedem Raum des einen Systems der zugeordnete Raum jeweils dem anderen System angehört.

Zu diesem Zwecke zeigen wir: [58])

1. Ist $\mathfrak{T}_0$ ein Umgebungsraum mit der Eigenschaft $(\bar{B}b)$, so besitzt der zugeordnete Häufungsraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ sicher die Eigenschaft (2).

2. Ist $\mathfrak{T}_0$ ein Umgebungsraum mit den Eigenschaften $(\bar{A}a)$, (D_0), so besitzt der zugeordnete Häufungsraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ sicher die Eigenschaft (3).

3. Ist $\mathfrak{T}_0$ ein Umgebungsraum mit den Eigenschaften $(\bar{B}b)$, $(\bar{C})$, $(\bar{D}_0)$, so besitzt der zugeordnete Häufungsraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ sicher die Eigenschaft (4).

4. Ist $\mathfrak{H}_0$ ein Häufungsraum mit den Eigenschaften (1), (2), so besitzt der zugeordnete Umgebungsraum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ sicher die Eigenschaft $(\bar{B}b)$.

5. Ist $\mathfrak{H}_0$ ein Häufungsraum mit den Eigenschaften (1), (3), so besitzt der zugeordnete Umgebungsraum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ sicher die Eigenschaft $(\bar{A}a)$ [59]).

6. Ist $\mathfrak{H}_0$ ein Häufungsraum mit den Eigenschaften (1), (2), (3), so besitzt der zugeordnete Umgebungsraum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ sicher die Eigenschaft $(\bar{D}_0)$.

7. Ist $\mathfrak{H}_0$ ein Häufungsraum mit den Eigenschaften (2), (4), so besitzt der zugeordnete Umgebungsraum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ sicher die Eigenschaft $(\bar{C})$.

Beweis der 1. Behauptung. $\mathfrak{A}$ sei eine beliebige Menge von $\mathfrak{T}_0$, P irgendein Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$. Wir zerlegen: $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2$. Angenommen, P sei weder von $\mathfrak{A}_1$ noch von $\mathfrak{A}_2$ Häufungspunkt. Nach

[57]) Vgl. auch Anm. [53]).

[58]) In den nachfolgenden 7 Behauptungen werden lauter *hinreichende* Bedingungen angegeben. Ob diese auch *notwendig* sind, ist in diesem Zusammenhang ohne Interesse.

[59]) Ist $\mathfrak{H}_0$ ein Häufungsraum, der aus mindestens zwei Punkten besteht, so ist bereits die Eigenschaft (3) allein hinreichend dafür, daß der zugeordnete Umgebungsraum $\mathfrak{T}(\mathfrak{H}_0)$ die Eigenschaft $(\bar{A}a)$ besitzt.

Definition des Häufungspunktes gibt es dann mindestens eine Umgebung $\mathfrak{U}_1(P)$, in der kein von P verschiedener Punkt von $\mathfrak{A}_1$, und mindestens eine Umgebung $\mathfrak{U}_2(P)$, in der kein von P verschiedener Punkt von $\mathfrak{A}_2$ liegt. Der Durchschnitt $\mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{U}_2$ der beiden Umgebungen $\mathfrak{U}_1(P)$, $\mathfrak{U}_2(P)$ enthält daher keinen von P verschiedenen Punkt von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, also keinen von P verschiedenen Punkt von $\mathfrak{A}$. Da $(\bar{B}b)$ gilt, ist $\mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{U}_2$ aber eine Umgebung von P. In dieser Umgebung gibt es also keinen von P verschiedenen Punkt von $\mathfrak{A}$; P ist demnach nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$, entgegen der Voraussetzung.

Beweis der 2. Behauptung. Angenommen, es gebe eine nur aus einem Punkte Q von $\mathfrak{T}_0$ bestehende Menge, die einen Punkt P von $\mathfrak{T}_0$ zum Häufungspunkt hat. Ist $Q = P$, so ergibt sich sofort ein Widerspruch zur Annahme: es müßte dann ja P Häufungspunkt der Menge $\{P\}$ sein und das ist, da (Aa) gilt, gemäß Anm. [35]) 2. unmöglich. Ist $Q \neq P$, so muß nach Definition des Häufungspunktes in jeder Umgebung von P der Punkt Q liegen. Eine Umgebung von P, die Q nicht enthält, gibt es dann also nicht, was dem Axiom $(\bar{D}_0)$ widerspricht.

Beweis der 3. Behauptung. Wir zeigen zunächst: Ist $\mathfrak{T}_0$ ein Umgebungsraum mit den Eigenschaften $(\bar{B}b)$ und (D_0) und P ein Punkt von $\mathfrak{T}_0$, der Häufungspunkt einer Menge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{T}_0$ ist, so gibt es in jeder Umgebung von P nicht nur einen Punkt von $\mathfrak{A} - \{P\}$, sondern sogar unendlich viele Punkte von $\mathfrak{A} - \{P\}$ und damit auch unendlich viele Punkte von $\mathfrak{A}$.

Angenommen, es gebe eine Umgebung von P, in der nur endlich viele Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ von $\mathfrak{A} - \{P\}$ liegen. Wegen der Gültigkeit von $(\bar{D}_0)$ gibt es dann auch eine Umgebung von P, die P_1 nicht enthält, ferner eine Umgebung von P, die P_2 nicht enthält, weiter eine Umgebung von P, die P_3 nicht enthält, usw. Der Durchschnitt aller dieser endlich vielen Umgebungen ist wegen der Gültigkeit von $(\bar{B}b)$ selbst eine Umgebung von P, die offenbar keinen der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ und damit also keinen Punkt von $\mathfrak{A} - \{P\}$ enthält. P ist demnach nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$, entgegen der Voraussetzung.

Wir zeigen ferner: Ist $\mathfrak{T}_0$ ein Umgebungsraum mit der Eigenschaft $(\bar{C})$ und P ein Punkt von $\mathfrak{T}_0$, der Häufungspunkt einer Menge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{T}_0$ ist, so gibt es in jeder Umgebung von P mindestens einen von P verschiedenen Punkt von $\mathfrak{A}$, der innerer Punkt der Umgebung ist.

$\mathfrak{U}$ sei irgendeine Umgebung von P. $\mathfrak{V}$ bezeichne die Menge der inneren Punkte von $\mathfrak{U}$. Wegen $(\bar{C})$ ist $\mathfrak{V}$ ebenfalls eine Umgebung

von P. Gemäß Definition des Häufungspunktes gibt es in jeder Umgebung von P, also auch in $\mathfrak{V}$, mindestens einen von P verschiedenen Punkt Q von $\mathfrak{A}$. Dieser Punkt Q ist Punkt von $\mathfrak{V}$ und als solcher innerer Punkt von $\mathfrak{U}$. In $\mathfrak{U}$ liegt also mindestens ein von P verschiedener Punkt von $\mathfrak{A}$, der innerer Punkt von $\mathfrak{U}$ ist, und da $\mathfrak{U}$ beliebig gewählt war, gilt dies für *jede* Umgebung von P, w. z. b. w.

Nunmehr läßt sich leicht zeigen, daß für einen Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ mit den Eigenschaften $(Bb), (\bar{C}), (D_0)$ der zugeordnete Häufungsraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$ sicher die Eigenschaft (4) besitzt.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Menge von $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{A}_H$ die Menge ihrer Häufungspunkte, P sei ein Häufungspunkt von $\mathfrak{A}_H$. In jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ von P gibt es daher definitionsgemäß mindestens einen von P verschiedenen Punkt von $\mathfrak{A}_H$, ja wegen $(\bar{C})$ nach dem obigen Ergebnis sogar mindestens einen von P verschiedenen Punkt Q von $\mathfrak{A}_H$, der innerer Punkt von $\mathfrak{U}$ ist. $\mathfrak{U}$ ist daher Umgebung von Q. Da Q als Punkt von $\mathfrak{A}_H$ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ ist, gibt es definitionsgemäß in $\mathfrak{U}$ mindestens einen von Q verschiedenen Punkt von $\mathfrak{A}$, und zwar auch einen solchen, der von P verschieden ist, da wegen $(\bar{B}b)$ und $(\bar{D}_0)$ nach dem obigen Ergebnis in $\mathfrak{U}$ nicht nur *ein* (von Q verschiedener) Punkt von $\mathfrak{A}$ sondern in Wahrheit unendlich viele Punkte von $\mathfrak{A}$ existieren. Da $\mathfrak{U}$ als Umgebung von P beliebig gewählt war, gibt es somit in *jeder* Umgebung von P mindestens einen von P verschiedenen Punkt von $\mathfrak{A}$; P ist also Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$, d. h. (4) ist erfüllt, w. z. b. w.

Beweis der 4. Behauptung. P sei irgendein Punkt von $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ seien irgend zwei Umgebungen von P. Nach Definition der Umgebung enthalten dann die Mengen $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}_2$ den Punkt P nicht und haben P auch nicht zum Häufungspunkt. Wir zeigen, daß P auch nicht Häufungspunkt der Menge $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{U}_2$ ist.

Setzen wir $\mathfrak{U}_1 - \mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{U}_2 = (\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}_1) + \mathfrak{A}$. Angenommen, P sei Häufungspunkt von $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{U}_2$. Da P nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}_1$ ist, so muß wegen (2) der Punkt P dann Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ sein. Da $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}_2 \supseteq \mathfrak{A}$ ist, so muß wegen (1) der Punkt P als Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ auch Häufungspunkt von $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}_2$ sein, was der Voraussetzung, daß $\mathfrak{U}_2$ Umgebung von P ist, widerspricht.

P ist also nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{U}_2$. P ist aber auch nicht Punkt von $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{U}_2$, da $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ und damit auch $\mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{U}_2$ den Punkt P enthalten. Nach Definition der Umgebung ist demnach $\mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{U}_2$ eine Umgebung von P; $(\bar{B}b)$ ist also erfüllt, w. z. b. w.

Beweis der 5. Behauptung. Angenommen, ein Punkt P von $\mathfrak{H}_0$ habe keine Umgebung. Aus der Umgebungsdefinition folgt, daß dann jede Menge von $\mathfrak{H}_0$, die P nicht enthält, P zum Häufungspunkt haben muß. Insbesondere muß dann die leere Menge P zum Häufungspunkt haben. Wegen (*1*) ist P dann aber auch Häufungspunkt der Menge $\{P\}$, was (*3*) widerspricht.

Die Annahme steht also im Widerspruch zu den Voraussetzungen; $(\bar{A}a)$ ist demnach erfüllt, w. z. b. w. [60]).

Beweis der 6. Behauptung. P, Q seien zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{H}_0$. Da $\mathfrak{H}_0$ die Eigenschaften (*1*), (*3*) besitzt, gibt es gemäß Behauptung 5 mindestens eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von P. Enthält $\mathfrak{U}$ den Punkt Q nicht, so stellt $\mathfrak{U}$ bereits eine Umgebung von P dar, wie das Axiom $(\bar{D}_0)$ sie fordert. Enthält jedoch $\mathfrak{U}$ den Punkt Q, so behaupten wir, daß auch die Menge $\mathfrak{U}-\{Q\}$ eine Umgebung von P ist. Zum Nachweis betrachten wir die Menge $\mathfrak{H}_0-(\mathfrak{U}-\{Q\})$ und zeigen, daß P nicht Häufungspunkt dieser Menge ist.

Angenommen, P sei Häufungspunkt dieser Menge. Dann muß, da $\mathfrak{H}_0-(\mathfrak{U}-\{Q\})=(\mathfrak{H}_0-\mathfrak{U})+\{Q\}$ und P gemäß Definition der Umgebung $\mathfrak{U}$ nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{H}_0-\mathfrak{U}$ ist, wegen (*2*) der Punkt P Häufungspunkt von $\{Q\}$ sein. Das widerspricht aber der vorausgesetzten Eigenschaft (*3*).

P ist also nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{H}_0-(\mathfrak{U}-\{Q\})$. Da P dieser Menge aber auch nicht als Punkt angehört, so ist laut Umgebungsdefinition $\mathfrak{U}-\{Q\}$ eine Umgebung von P, und zwar offenbar eine solche, die Q nicht enthält. $(\bar{D}_0)$ ist demnach erfüllt, w. z. b. w.

Beweis der 7. Behauptung. P sei irgendein Punkt von $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{U}$ irgendeine Umgebung von P. Nach Definition der Umgebung enthält dann die Menge $\mathfrak{H}_0-\mathfrak{U}$ den Punkt P nicht und hat insbesondere auch P nicht zum Häufungspunkt. $\mathfrak{V}$ sei die Menge der inneren Punkte von $\mathfrak{U}$. Es ist $\mathfrak{V}\subseteq\mathfrak{U}$ und P gehört außer zu $\mathfrak{U}$ auch zu $\mathfrak{V}$. Setzt man $\mathfrak{U}-\mathfrak{V}=\mathfrak{A}$, so stellt $\mathfrak{A}$ die Gesamtheit der Punkte von $\mathfrak{U}$ dar, für die $\mathfrak{U}$ nicht Umgebung ist. Aus der Umgebungsdefinition folgt dann, daß jeder Punkt Q von $\mathfrak{A}$ Häufungspunkt der Menge $\mathfrak{H}_0-\mathfrak{U}$ ist. $\mathfrak{A}$ stellt also eine Menge dar, deren sämtliche Punkte Häufungspunkte von $\mathfrak{H}_0-\mathfrak{U}$ sind.

---

[60]) In dieser Form gilt der Beweis auch für den Fall, daß $\mathfrak{H}_0$ nur aus dem Punkte P besteht. Enthält $\mathfrak{H}_0$ neben P noch mindestens einen weiteren Punkt $Q\neq P$, so folgt aus der in obigem Beweis gemachten Annahme, daß P insbesondere Häufungspunkt der Menge $\{Q\}$ sein muß, was (*3*) widerspricht; die Voraussetzung (*1*) ist also in diesem Falle entbehrlich (vgl. Anm. [59])).

Angenommen, $\mathfrak{V}$ sei nicht Umgebung von P. Nach Umgebungsdefinition muß dann der Punkt P, da er nicht zu $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{V}$ gehört, Häufungspunkt von $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{V}$ sein. Da $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{V} = (\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}) + \mathfrak{A}$ und P nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}$ ist, muß wegen (2) der Punkt P Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ sein. P ist also Häufungspunkt von Häufungspunkten der Menge $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}$ und müßte somit wegen (4) selbst Häufungspunkt von $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{U}$ sein, was aber der Voraussetzung, daß $\mathfrak{U}$ Umgebung von P ist, widerspricht.

Demnach ist $\mathfrak{V}$ Umgebung von P; $(\bar{C})$ ist also erfüllt, w. z. b. w.

Aus den Behauptungen 1, 2 und 3 folgt nun in Verbindung mit Satz 7, 1 ohne weiteres, daß für jeden Umgebungsraum des Systems $(A b)$, $(\bar{B})$ der zugeordnete Häufungsraum sicher dem System (h_1), (2), für jeden Umgebungsraum des Systems $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, (D_0) der zugeordnete Häufungsraum sicher dem System (1), (2), (3) und schließlich für jeden Umgebungsraum des Systems $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, $(\bar{C})$, $(\bar{D}_0)$ der zugeordnete Häufungsraum sicher dem System (1), (2), (3), (4) angehört.

Andererseits folgt aus den Behauptungen 4, 5, 6 und 7 und Satz 8, 1 in Verbindung mit Satz 9 sowie der in Anm. [53]) vermerkten Tatsache, daß ein Häufungsraum mit den Eigenschaften (1), (2), (3) sicher auch die Eigenschaft (h_1) besitzt, ohne weiteres, daß für jeden Häufungsraum des Systems (h_1), (2) der zugeordnete Umgebungsraum sicher dem System $(\bar{A} b)$, $(\bar{B})$, für jeden Häufungsraum des Systems (1), (2), (3) der zugeordnete Umgebungsraum sicher dem System $(\bar{A})$, (B), (D_0) und schließlich für jeden Häufungsraum des Systems (1), (2), (3), (4) der zugeordnete Umgebungsraum sicher dem System $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, $(\bar{C})$, $(\bar{D}_0)$ angehört.

Damit ist der Beweis der Äquivalenz der genannten Systeme von Umgebungs- und Häufungsaxiomen erbracht.

34. Die Systeme (A), $(\bar{B})$, $(\bar{C})$, $(\bar{D}_0)$ und (1), (2), (3), (4), die wir in Nr. **33** als zueinander äquivalente Systeme erkannt haben, sind auch bereits bei H. Tietze—L. Vietoris, l. c. [1]), Nr. **10** als äquivalente Systeme angegeben. Dabei gebrauchen H. Tietze—L. Vietoris den Begriff der Äquivalenz — ohne ihn eigens zu definieren — letzten Endes im gleichen Sinne wie er in der vorliegenden Arbeit verwendet wird. Hingegen wird bei H. Tietze—L. Vietoris [61]) der Übergang von der einen Raumart zur anderen zum Teil in anderer Weise vorgenommen wie hier in dieser Arbeit; genauer: der Übergang vom

[61]) Vgl. l. c. [1]), Nr. **15**.

Häufungsraum zum Umgebungsraum erfolgt durch die nämliche Definition von Umgebungsbeziehungen im Häufungsraum wie hier[62]), der Übergang vom Umgebungsraum zum Häufungsraum jedoch wird durch die folgende Erklärung von Häufungspunkten im Umgebungsraum hergestellt:

Ist P ein beliebiger Punkt eines Umgebungsraumes $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{A}$ irgendeine Menge von $\mathfrak{T}$, so heiße P „*Häufungspunkt von* $\mathfrak{A}$“ dann und nur dann, wenn es in jeder Umgebung von P unendlich viele Punkte von $\mathfrak{A}$ gibt[63]).

Die Tatsache, daß die Systeme $(\overline{A})$, $(\overline{B})$, $(\overline{C})$, $(\overline{D}_0)$ und (1), (2), (3), (4) auch unter Zugrundelegung der von H. Tietze—L. Vietoris gebrauchten Definition von Häufungspunkten im Umgebungsraum äquivalent sind, ist nun allerdings nicht überraschend; denn in Umgebungsräumen, die die Eigenschaften $(\overline{Bb})$ und $(\overline{D}_0)$ besitzen, sind, wie aus dem ersten Teil des Beweises der Behauptung 3 in Nr. **33** ohne weiteres folgt, die von uns verwendete Definition von Häufungspunkten und die von H. Tietze—L. Vietoris verwendete sicher gleichwertig[64]). Jedoch müssen keineswegs in *jedem* Falle Systeme von Umgebungs- und Häufungsaxiomen, die unter Zugrundelegung der von uns gebrauchten Erklärung von Häufungspunkten äquivalent sind, auch unter Zugrundelegung der bei H. Tietze—L. Vietoris verwendeten Häufungspunktdefinition äquivalent sein:

Betrachten wir z. B. die Systeme (t_1), (t_2) einerseits und (h_1) andererseits. Wie in Nr. **31** dargelegt wurde, sind diese beiden Systeme äquivalent, vorausgesetzt, daß die in dieser Arbeit verwendete Häufungspunkterklärung zugrundegelegt wird. Wir wollen zeigen, daß diese Systeme mit der Häufungspunktdefinition von H. Tietze—L. Vietoris sicher nicht äquivalent sind. Der Beweis ist erbracht, wenn es gelingt, einen Umgebungsraum $\mathfrak{T}_0$ aufzufinden, der die Eigenschaften (t_1), (t_2) besitzt und für den der unter Verwendung der Häufungspunkterklärung von H. Tietze—L. Vietoris aus $\mathfrak{T}_0$ hervorgehende Häufungsraum zu $\mathfrak{T}_0$ nicht äquivalent ist. Einen derartigen Umgebungsraum stellt aber

[62]) Vgl. Nr. 8.

[63]) Demgegenüber lautet die in der vorliegenden Arbeit (vgl. Nr. 8) zugrundegelegte Erklärung von Häufungspunkten im Umgebungsraum: Ist P ein beliebiger Punkt eines Umgebungsraumes $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{A}$ irgendeine Menge von $\mathfrak{T}$, so heiße P „Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$“ dann und nur dann, wenn es in jeder Umgebung von P mindestens einen von P verschiedenen Punkt von $\mathfrak{A}$, d. h. mindestens einen Punkt von $\mathfrak{A}-\{P\}$ gibt.

[64]) Auf die Gleichwertigkeit dieser Definitionen *im* $\mathfrak{R}^n$ wurde zu Eingang der Arbeit unter Nr. 5 und Anm. [12]) hingewiesen.

bereits der Raum $\mathfrak{T}_0$ des Beispiels 5 dar. Dieser Raum $\mathfrak{T}_0$ besitzt die Eigenschaften $(t_1), (t_2)$. Erklären wir in ihm Häufungspunkte nach H. Tietze—L. Vietoris, so gilt für den so aus $\mathfrak{T}_0$ erwachsenden Häufungsraum — er sei mit $\mathfrak{H}'(\mathfrak{T}_0)$ bezeichnet [65]) —, daß kein Punkt P_ν von $\mathfrak{T}_0$ Häufungspunkt irgendeiner Menge aus $\mathfrak{T}_0$ ist, da ja in jeder Umgebung irgendeines Punktes P_ν immer nur endlich viele Punkte von $\mathfrak{T}_0$ liegen. Der dem Raum $\mathfrak{H}'(\mathfrak{T}_0)$ zugeordnete Umgebungsraum $\mathfrak{T}[\mathfrak{H}'(\mathfrak{T}_0)] = \mathfrak{T}_1'$ ist dann sicher von $\mathfrak{T}_0$ verschieden: für jeden Punkt P_ν von $\mathfrak{T}_0$ ist Umgebung von P_ν in $\mathfrak{T}_1'$ $(= \mathfrak{U}(P_\nu\ \mathfrak{T}_1'))$ offenbar jede Menge aus $\mathfrak{T}_0$, die P_ν enthält; insbesondere ist daher die Menge $\{P_0\}$ eine $\mathfrak{U}(P_0|\mathfrak{T}_1')$; jedoch ist $\{P_0\}$ keine $\mathfrak{U}(P_0|\mathfrak{T}_0)$. $\mathfrak{H}'(\mathfrak{T}_0)$ ist daher zu $\mathfrak{T}_0$ nicht äquivalent.

Es wird hieraus deutlich und wurde ja auch früher schon betont [66]), wie wesentlich Aussagen über Zuordnung von Räumen verschiedener Art und Aussagen über Äquivalenz oder Nicht-Äquivalenz von den Festsetzungen abhängig sind, durch die die Zuordnung zwischen den Raumbegriffen vorgenommen wird; andersgeartete Zuordnungsbeziehungen können wesentlich andere Ergebnisse zeitigen. Es ist daher erforderlich, bei allen Fragestellungen, die den Zusammenhang zwischen zwei Raumbegriffen behandeln, als Grundlage der Erörterungen genaue Festsetzungen darüber zu treffen, wie der Übergang vom einen Raumbegriff zum anderen hergestellt werden soll.

---

[65]) Zum Unterschied gegenüber dem unter Verwendung *unserer* Häufungspunktdefinition aus $\mathfrak{T}_0$ entspringenden Häufungsraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}_0)$.

[66]) Vgl. die Einleitung und Nr. **10**, letzter Absatz.

(Eingegangen: 8. XI. 1939.)

Lebenslauf.

Ich bin geboren am 22. Juni 1908 zu Würzburg als Sohn des Kellermeisters Josef Apfelbacher und seiner Ehefrau Anna, geb. Henke. Nach neunjährigem Besuch der Oberrealschule Würzburg legte ich Ostern 1928 die Reifeprüfung ab und studierte hierauf in München an der Universität und Technischen Hochschule acht Semester hindurch Mathematik und Physik. Mein Studium schloß ich im März 1932 mit der Prüfung für das Lehramt in Mathematik und Physik in Bayern (I. Teil) ab. Nach Bestehen des II. Teils der Prüfung für das Lehramt in Mathematik und Physik im Februar 1933 wurde ich dem Neuen Realgymnasium in München zur Ableistung des Vorbereitungsdienstes zugeteilt. Während dieser Zeit assistierte ich auch an der Universität München in den Übungen zur darstellenden Geometrie.

Am 19. Februar 1934 trat ich als Assistent in den bayerischen Wetterdienst ein. Am 1. September 1934 wurde ich als wissenschaftlicher Beobachter zum Observatorium auf der Zugspitze versetzt und am 1. April 1935 als Meteorologe in den Wetterdienst des Reiches übernommen, dem ich auch weiterhin angehöre.

München, den 29. November 1938.

Karl Apfelbacher.